# 1st order ODE (一階常微分方程)

標準式:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\ \text{, 或寫成} \tag{1}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$

一階常微分方程 被稱爲

- *separable* (in $x$ and $y$) 假如 (1) 或 (2) 可以被寫成 $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$。(直接積分: $\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = c$ 便可求得 $x, y$ 的關係式)

- *homogeneous* 假如 (1) 的 $f(x,y)$ 符合 $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$。(令 $v = \frac{y}{x}$, 即 $y$ 用 $vx$ 取代, 則 (1) 變成 $\frac{dv}{dx}x + v = f(1,v)$, $\iff$ $\frac{dv}{f(1,v)-v} = \frac{dx}{x}$, 變成 separable 了 (in $x$ and $v$) ...)

- *exact* 假如 (2) 的 $M, N$ 符合 $M_y = N_x$。也就是說, 存在一個 $\phi(x,y)$ 使得 $d\phi = M\,dx + N\,dy$, (若 $\phi$ 二次可微, 當然會有 $\phi_{xy} = M_y = N_x = \phi_{yx}$ )。也就是說, (2) 的解就是 $\phi(x,y) = C$ 。找 $\phi(x,y)$ 很簡單, 因爲 $M\,dx + N\,dy$ 等於 $d\phi = \phi_x\,dx + \phi_y\,dy$, 所以 $\begin{array}{l}\phi_x = M\\ \phi_y = N\end{array}$ , $\begin{array}{l}\phi(x,y) = \int M dx + C_1(y)\\ \phi(x,y) = \int N dy + C_2(x)\end{array}$ , 兩式比較就知道該如何取 $C_1$ 和 $C_2$ 了。很明顯地, separable 當然 exact。

  **註:** 學過向量分析的不妨看一下: 向量場 $\mathbf{f}$ 的散度 記爲 div $\mathbf{f}$ 或 $\nabla \bullet \mathbf{f}$。$\mathbf{f}$ 的旋度 記爲 curl $\mathbf{f}$ 或 $\nabla \times \mathbf{f}$。

  $$\begin{array}{lll}\mathbf{f}\ \text{爲保守場} & \iff & \text{任一路徑積分}\ \int_{A\leadsto B} \mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}\ \text{與}\ A\ \text{點 到}\ B\ \text{點 的路徑選取無關}\\ & \iff & \nabla\times\mathbf{f} = \mathbf{0}\\ & \iff & \exists\ \text{純量位能}\ \phi\ \text{使得}\ \nabla\phi = \mathbf{f}\end{array}$$

  例如, 电位能的梯度 = 电力场,

  將二維向量場 $(M,N)$ 嵌入三維空間 $(M,N,0)$: 令 $\mathbf{f}(x,y) := (M(x,y), N(x,y), 0)$, 則 $\nabla\times\mathbf{f} = (N_x - M_y)\hat{k} = (0,0,N_x - M_y)$。因此,

  重力位能的梯度 = 重力场, ...

  $$\begin{array}{lll}\mathbf{f} = (M,N,0)\ \text{爲保守場} & \iff & M_y = N_x,\\ & \iff & \text{(2) 爲}\ \textit{exact},\ \text{則存在位能}\ \phi\in\mathbb{R}\ \text{使得}\ \nabla\phi = \mathbf{f},\\ & \iff & \text{(2) 等價於}\ \underbrace{\nabla\phi\bullet d\mathbf{r}}_{d\phi} = 0,\\ & \iff & \text{(2) 的解爲}\ \phi(x,y) = C\ \text{一族},\\ & \iff & \text{滿足 (2) 的所有}\ (x,y)\ \text{在某個等位面上。}\end{array}$$

## Integrating Factor (積分因子)

若 (2) 不是 exact, 但乘以某個 $I(x,y)$ 之後, $IM\,dx + IN\,dy = 0$ 是 exact, 則 $I$ 稱爲 *integrating factor* 。上述即 $(IM)_y = (IN)_x$,

$$\iff\ I_x N - I_y M = (M_y - N_x) I \tag{3}$$

(3) 是一個求 $I$ 的 PDE (偏微分方程, 涉及 $I$ 的偏導數) 一般來說是相當困難的。讓我們先集中在較簡單的情況: 如果 $I$ 是某$\underbrace{\text{單變量函數}}_{I}$與某$\underbrace{\text{多變量函數}}_{S}$的合成, 即 $I = I(s(x,y))$, 則求 $I$ 的 PDE 就變成 ODE 了。例如:

1. 假想 $\begin{cases} I = I(s), \\ s := x, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} I_x = I', \\ I_y = 0, \end{cases}$ 且 (3) 變成 $I'N = (M_y - N_x)I \iff \dfrac{I'}{I} = \dfrac{M_y - N_x}{N} =: f(s)$, 就可輕易求出 $I(s) = e^{\int f(s)ds}$。以上所說的就是: 如果你發現 $\frac{M_y - N_x}{N}$ 只跟 $x$ 有關, 就可以將積分因子取爲 $I(x) := e^{\int f(x)\,dx}$ 了。
2. 假想 $\begin{cases} I = I(s), \\ s := y, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} I_x = 0, \\ I_y = I', \end{cases}$ 且 (3) 變成 $I'M = (N_x - M_y)I \iff \dfrac{I'}{I} = \dfrac{N_x - M_y}{M} =: f(s)$, 則 $I(s) = e^{\int f(s)ds}$。
3. 假想 $\begin{cases} I = I(s), \\ s := xy, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} I_x = yI'(s), \\ I_y = xI'(s), \end{cases}$ 且 (3) 變成 $(yN - xM)I' = (M_y - N_x)I \iff \dfrac{I'}{I} = \dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} =: f(s)$, 則 $I(s) = e^{\int f(s)ds}$。
4. 假想 $\begin{cases} I = I(s), \\ s := ax + by + c, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} I_x = aI'(s), \\ I_y = bI'(s), \end{cases}$ 且 (3) 變成 $(aN - bM)I' = (M_y - N_x)I \iff \dfrac{I'}{I} = \dfrac{M_y - N_x}{aN - bM} =: f(s)$, 則 $I(s) = e^{\int f(s)ds}$。
5. . . . 自己寫幾個試試

$M_y - N_x$ 大家都有這個

## 1st order linear ODE (一階線性常微分方程)

$$y' + p(x)y = q(x) \iff \underbrace{p(x)y - q(x)}_{M}\,dx + \underbrace{1}_{N}\,dy = 0$$

$M_y = p(x)$, $N_x = 0$, 一般來說不是 exact。不過, $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$, 根據上一段所說的, 可以取積分因子 $I(x) = e^{\int p\,dx}$, 則 $I(p\,y - q)dx + I\,dy = 0$ 就變成 $p\,y\,I\,dx + I\,dy = q\,I\,dx$,

$$\begin{aligned} &\iff d(yI) = qI\,dx \\ &\iff yI = c + \int qI\,dx \\ &\iff y = \frac{1}{I}(c + \int qI\,dx), \quad \text{即} \quad y = e^{\int p\,dx}(c + \int qe^{-\int p\,dx}dx). \end{aligned}$$

不要背

## 1st order nonlinear ODE (一階非線性常微分方程)

有些一階非線性 ODE 沒辦法輕易地找到積分因子來直接解決。例如:

- **(Bernoulli)** $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$
  令 $v := y^{1-n}, \ldots \Longrightarrow u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$, 變成 1st order linear ODE 了, . . . 。
- **(Lagrange)** $\boldsymbol{y = xf(y') + g(y')}$
  先 $\frac{d}{dx}$, 在令 $p := y', \ldots \Longrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p)-p}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$, 變成 1st order linear ODE 了, . . . 。
- **(Ricatti)** $\boldsymbol{y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0}$
  令 $y = \frac{w'}{aw}$ for some $w(x)$, $\ldots \Longrightarrow w'' + \left(\frac{-a(x)'}{a(x)} + b(x)\right)w' + a(x)c(x)w = 0$, 變成 2nd order linear ODE (homogeneous) 了, . . . 。