矩陣代數

劉承揚

矩陣代數

- 許多Matlab的函數和運算子經由矩陣和陣列進行計算
- 矩陣性質、運算元和種類的簡介

矩陣

- 由一些不能被單獨運算的元素所組成的長方形陣列
- 矩陣中的元素可以是實數、複數、代數表示式、另一個矩陣
- 經常是以括號、中括號、大括號將其元素框住
- 例：

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}A & A & 2A\\ A & -A & A\end{bmatrix}$$

$$\text{所以}\quad B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3 & -2 & 6 & -4\\ -2 & 4 & -2 & 4 & -4 & 8\\ 3 & -2 & -3 & 2 & 3 & -2\\ -2 & 4 & 2 & -4 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

矩陣元素

a_{ij}

第一下標表示列數 列(row) —— 第二下標表示行數 行(column)

- 矩陣大小 ---列 x 行(row x column)

主對角線

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$m\times n$ 矩陣 A　　　$n\times n$ 方陣 A

矩陣元素

試求矩陣A之a_{12}, a_{23}及a_{31}等元素，並指出其主對角線由哪些元素組成

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ 2 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

Solution

由於a_{12}為位於第一列、第二行之元素，所以$a_{12}=-2$，同樣地，$a_{23}=4$而$a_{31}=2$。而矩陣A之主對角線包含$a_{11}=1$、$a_{22}=-3$而$a_{33}=5$等元素。

矩陣元素

定義：

若兩個矩陣大小相同(same size)，且相對應之元素亦均相同，則稱此二矩陣為相等(**equal**)，亦即$A=B$若$a_{ij}=b_{ij}$。

矩陣的行列值

A 的行列式值以 |**A**| 或 det(**A**) 表示，對於一 2×2 的陣列我們定義其行列式值爲

$$\text{若}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \quad \text{則} \quad \det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{A.1}$$

一般而言，對一 $n\times n$ 陣列 **A** 而言，可定義一餘因子 $C_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$。在此定義中，$\Delta_{ij}$ 是將 **A** 中的第 i 列及第 j 行去除後所餘下陣列的行列式值，其中 Δ_{ij} 稱爲 **A** 之子行列式，因此

$$\det(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{ik} \quad \text{任意} \quad i=1,2,\ldots,n \tag{A.2}$$

這是我們所知的沿第 i 列展開的行列式值。通常是使用第一列展開。此方程式以計算 n 個 $(n-1)\times(n-1)$ 陣列的行列式值取代計算一個 $n\times n$ 陣列之行列式值，此步驟可不斷重複下去直到餘因子被縮減爲 2×2 之行列式值爲止。因此將會用到式 (A.1)。這是陣列 **A** 之行列式值的正式定義，但並不是一種有效的計算方式。

矩陣的行列值

- 範例 1：二階矩陣的行列式

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2(2)-1(-3) \quad =4+3 \quad =7$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2(2)-4(1) \quad =4-4 \quad =0$$

$$\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0(4)-2(3) \quad =0-6 \quad =-6$$

- 注意： 矩陣的行列式可以為正、零或負值。

3x3矩陣的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

減這三個乘積

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

加這三個乘積

$$\Rightarrow \det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

3x3矩陣的行列式

- 範例

$$\begin{array}{cccccc} & & & -4 & 0 & 6 \\ & & & & & \\ A = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right] & & \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ -4 \end{array} & \\ & & & 0 & 16 & -12 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A) = |A| = 0 + 16 - 12 - (-4) - 0 - 6 = 2$$

產生零行列式的條件

若A是方陣並且下列任何的條件是成立的，則$\det(A)=0$

(a) 一整列(或一整行)全為零

(b) 兩列(或行)是相等的

(c) 某一列(或行)是另一列(或行)的倍數

產生零行列式的條件

- 範例

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&0\\4&5&6\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1&4&0\\2&5&0\\3&6&0\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\4&5&6\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1&4&2\\1&5&2\\1&6&2\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-2&-4&-6\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1&8&4\\2&10&5\\3&12&6\end{vmatrix}=0$$

特殊矩陣

- 上三角矩陣 (upper triangular matrix)

  矩陣之主對角線下方的元素都為零

- 下三角矩陣 (lower triangular matrix)

  矩陣之主對角線上方的元素都為零

- 對角矩陣 (diagonal matrix)

  矩陣之主對角線上方和下方的元素皆為零

特殊矩陣

- 範例

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

上三角矩陣　　下三角矩陣　　對角矩陣

特殊矩陣

定義

零矩陣(zero matrix)指所有元素均為零之矩陣。

對角矩陣(diagonal matrix)指對角線以外的元素均為零之方陣。

單位矩陣(identity matrix)則為對角線元素均為1的對角矩陣。(說明如圖2.3)

$$O_{mn}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

零矩陣

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

對角矩陣 A

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

單位矩陣

三角矩陣的行列式

若 A 是 n 階三角矩陣，則它的行列式為主對角線上元素的乘積。即

$$\det(A)=|A|=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

三角矩陣的行列式

- 範例

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

解：

(a) $|A| = (2)(-2)(1)(3) = -12$

(b) $|B| = (-1)(3)(2)(4)(-2) = 48$

矩陣加法

定義

令A、B為相同大小之矩陣，則A與B之和(**sum**, $A+B$)為此二矩陣各對應元素相加後所得之矩陣，而矩陣$A+B$亦與A, B之大小相同。若矩陣A、B之大小不同，則無法相加，亦即此二矩陣之和不存在。

因此，若 $C=A+B$, 則 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

矩陣加法

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$, 及 $C=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$.

試求$A+B$及 $A+C$，如果這些和均存在。

Solution

$$\text{(1) } A+B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2 & 4+5 & 7-6\\ 0-3 & -2+1 & 3+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 9 & 1\\ -3 & -1 & 11\end{bmatrix}.$$

(2) A爲2×3之矩陣，而C爲2×2之矩陣，即大小不相同，因此$A+C$之和不存在。

矩陣純量乘積

定義

令A為一矩陣而c為一純量，則矩陣A與c之純量乘積(scalar multiplication)，註記為cA，為矩陣A每一元素均乘以c後所得之矩陣，而矩陣cA與矩陣A之大小相同。

Example 3

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$，求$3A$。

Solution

$$3A=\begin{bmatrix}3\times 1 & 3\times 4 & 3\times 7\\ 3\times 0 & 3\times(-2) & 3\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 12 & 21\\ 0 & -6 & 9\end{bmatrix}$$

矩陣變號及減法

定義

矩陣變號(Negation)

C矩陣變號 → -C = (-1)C

矩陣減法

現在以與矩陣加法、純量乘積及矩陣變號均相通的方式定義矩陣減法。令

$$A - B = A + (-1)B$$

Example

Suppose $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-2 & 0-8 & -2-(-1) \\ 3-0 & 6-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix}.$$

矩陣乘積

定義

- 若矩陣A之行數與矩陣B之列數不同，則A, B之乘積矩陣(product matrix)AB不存在。
- 若矩陣A之行數與矩陣B之列數相同，則A, B之乘積矩陣AB存在。而乘積矩陣AB位於第i列、第j行之元素，係由矩陣A第i列元素與矩陣B第j行之元素對應相乘後加總而得。

令矩陣A有n行且矩陣B之有n列，矩陣A之第i列($A_{第i列}$)為$[a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}]$，而矩陣$B$之第$j$行($B_{第j行}$)為$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$。則若$C = AB$，必有$c_{ij} = A_{第i列}B_{第j行} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$。

矩陣乘積

Let $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&0&1\\3&-2&6\end{bmatrix}$, and $C=\begin{bmatrix}6&-2&5\end{bmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
AB&=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&1\\3&-2&6\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(1\times5)+(3\times3)&(1\times0)+(3\times(-2))&(1\times1)+(3\times6)\\(2\times5)+(2\times3)&(2\times0)+(0\times(-2))&(2\times1)+(0\times6)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}14&-6&19\\10&0&2\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

矩陣乘積不具交換率(*Matrix multiplication is not commutative*)

矩陣乘積

Let $A=\begin{bmatrix}2&1\\7&0\\-3&-2\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}-1&0\\3&5\end{bmatrix}$.

$$
AB=\begin{bmatrix}2&1\\7&0\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}-2+3&0+5\\-7+0&0+0\\3-6&0-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\-7&0\\-3&-10\end{bmatrix}
$$

Example 6

Let $C=AB$, $A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&4\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}-7&3&2\\5&0&1\end{bmatrix}$

$C_{23}=\begin{bmatrix}-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=(-3\times2)+(4\times1)=-2$

乘積矩陣之大小

若A為$m \times r$之矩陣，而B為$r \times n$之矩陣，則AB為$m \times n$之矩陣

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB}$$

Example 7

若A為5×6之矩陣，而B為6×7之矩陣，試問乘積矩陣AB之大小

$$\underset{5 \quad 6}{A} \quad \underset{6 \quad 7}{B} = \underset{5 \quad 7}{AB}$$

5 x 7

矩陣分割

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ \hline -2 & 5 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

where $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $R = [-2]$, and $S = [5 \quad -3]$.

(1)

$$A + B = \begin{bmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H & I & J \\ K & L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P+H & Q+I & R+J \\ S+K & T+L & U+M \end{bmatrix}$$

(2)

$$AB = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PM + QN \\ RM + SN \end{bmatrix}$$

三種貨品在某量販店四個營業季的銷售資料（單位為百萬元）如下表所示；加權平均被用來預測未來的銷售情形，而且愈近的營業季其權重值愈重；這樣的處理方式可以緩和短期銷售波動對趨勢的影響，也可以更強調近期的銷售情形所代表的意義。假設第一季(Q1)至第四季(Q4)的權重分別為1, 2, 3及4，試建構一矩陣模式以求解平均季銷售額

	Q1	Q2	Q3	Q4
Item 1	312	278	196	190
Item 2	194	186	203	157
Item 3	968	871	893	918

$$\begin{bmatrix} 312 & 278 & 196 & 190 \\ 194 & 186 & 203 & 157 \\ 968 & 871 & 893 & 918 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312\times1 & 278\times2 & 196\times3 & 190\times4 \\ 194\times1 & 186\times2 & 203\times3 & 157\times4 \\ 968\times1 & 871\times2 & 893\times3 & 918\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2216 \\ 1803 \\ 9061 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(1+2+3+4)}\begin{bmatrix} 2216 \\ 1803 \\ 9061 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 221.6 \\ 180.3 \\ 906.1 \end{bmatrix}$$

因此加權平均（記得單位是百萬元!）為 Item 1 \$221,600；Item 2 \$180,300；Item 3 \$906,100 上列所得數據將被用來預測下一季各項產品之銷售額。

矩陣運算之性質

令A, B及C為矩陣，而a, b及c為純量，並假設這些矩陣之大小可使下列運算成立。

矩陣加法及純量乘積之性質

1. $A+B=B+A$ 加法交換性 (*commutative*)
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ 加法結合性 (*associative*)
3. $A+O=O+A=A$ (O為適當大小之零矩陣)
4. $c(A+B)=cA+cB$ 加法分配性 (*distributive*)
5. $(a+b)C=aC+bC$ 加法分配性 (*distributive*)
6. $(ab)C=a(bC)$

矩陣運算之性質

若兩個矩陣大小相同(same size)，且相對應之元素亦均相同，則稱此二矩陣為相等(**equal**)，亦即X = Y 若$x_{ij} = y_{ij}$。

定律證明

1. 加法交換性 **A + B = B + A**

1. 若矩陣A、B之大小不同，則無法相加。若A、B為相同大小之矩陣，則$A+B$、$B+A$與A, B之大小相同。
2. 令X = **A + B** ; *Y* = **B + A**

   則 $x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = y_{ij}$

$\Rightarrow$ **A + B = B + A**

矩陣運算之性質

2. 加法結合性 **A + (B + C) = (A + B) + C**

1. 若A、B、C為相同大小之矩陣，則$(A+B)$、$(B+C)$、$A+(B+C)$、$(A+B)+C$與A, B之大小相同。
2. 令X = **A + (B + C)** ; *Y* = **(A + B) + C**

   則 $x_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = y_{ij}$

$\Rightarrow$ **A + (B + C) = (A + B) + C**

3. 加法分配性 ***c*(A + B) = *c*A + *c*B**

1. 若A、B為相同大小之矩陣，則c(**A + B**)、c**A**、c**B**與A, B之大小相同。
2. 令X = c(**A + B**) ; *Y* = c**A** + c**B**

   則 $x_{ij} = c(a_{ij} + b_{ij}) = ca_{ij} + cb_{ij} = y_{ij}$

$\Rightarrow$ c(**A + B**) = c**A** + c**B**

矩陣運算之性質

令A, B及C為矩陣，而a, b及c為純量，並假設這些矩陣之大小可使下列運算成立。

矩陣乘法之性質

1. $(AB)C = A(BC)$ 乘法結合性 (*associative*)
2. $A(B + C) = AB + AC$ 乘法分配性 (*distributive*)
3. $(A + B)C = AC + BC$ 乘法分配性 (*distributive*)
4. $AI_n = I_nA = A$ (I_n為適當大小之單位矩陣)
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

註：通常$AB \neq BA$ 矩陣乘法不具交換性 (*commutative*)

矩陣運算之性質

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB}$$

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} \quad \underset{n \times o}{C} = \underset{m \times n}{AB} \quad \underset{n \times o}{C} = \underset{m \times o}{ABC}$$

若矩陣乘積存在，則所得乘積矩陣之列數將與第一個矩陣之列數相同，而其行數則與最後一個矩陣之行數相同

矩陣運算之性質

$$\text{Let } A=\begin{bmatrix}1&3\\-4&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&-7\\8&1\end{bmatrix}, \text{and } C=\begin{bmatrix}0&-2\\5&-1\end{bmatrix}.$$

$$A+B+C=\begin{bmatrix}1&3\\-4&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-7\\8&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-2\\5&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3+0&3-7-2\\-4+8+5&5+1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6\\9&5\end{bmatrix}.$$

Example 2

$$\text{Let } A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}, \text{and } C=\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&3&11\end{bmatrix}.$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&3&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\1\end{bmatrix}.$$

矩陣運算之性質

在代數理論中，我們知道以下的消去法則

- 若$ab=ac$且$a\neq 0$，則$b=c$
- 若$pq=0$，則$p=0$或$q=0$

但是在矩陣運算中，上列法則不必然成立

- $AB=AC$不必然表示$B=C$
- $PQ=O$不必然表示$P=O$或$Q=O$

矩陣運算之性質

試簡化下列之矩陣表示

$$A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB$$

Solution

利用矩陣運算性質可得

$$\begin{aligned}&A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB\\&=A^2+2AB+6BA-3B^2-A^2+7B^2-5AB\\&=-3AB+6BA+4B^2\end{aligned}$$

記得要抗拒將 $-3AB+6BA$ 進一步簡化的慾望，因為矩陣乘積是不具交換性質的。

矩陣乘冪

Theorem 2.3

若矩陣 A 為一 $n\,x\,n$ 方陣，r 與 s 為非負整數，則有

1. $A^rA^s=A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s=A^{rs}$.
3. $A^0=I_n$ (依據定義)

Example 4

If $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, 計算 $A^4=AAAA=(A^2)^2$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -10\\ -5 & 6\end{bmatrix}.$$

矩陣的轉置

定義：
矩陣A之轉置矩陣(transpose matrix)，註記為A^t，為各行均為矩陣A各列之矩陣

Example 1

$$A=\begin{bmatrix}2 & 7\\ -8 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -7\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, \text{and } C=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

$$A^t=\begin{bmatrix}2 & -8\\ 7 & 0\end{bmatrix} \qquad B^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ -7 & 6\end{bmatrix} \qquad C^t=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}.$$

矩陣的轉置性質

令A、B為矩陣，c為常數，並假設各矩陣之大小可使下列各運算正確進行

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$　矩陣加法之轉置
2. $(cA)^t = cA^t$　純量乘積之轉置
3. $(AB)^t = B^tA^t$　矩陣乘法之轉置
4. $(A^t)^t = A$

定義：
對稱矩陣指一原矩陣與其轉置矩陣相同之矩陣

對稱

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & -4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & 7 & 8\\ -4 & 8 & -3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 7 & 3 & 9\\ -2 & 3 & 2 & -3\\ 4 & 9 & -3 & 6\end{bmatrix}$$

對稱

複數矩陣

矩陣元素可以是複數，複數的形式一般表示如下

$$z = a + bi$$

其中a, b為實數，$i = \sqrt{-1}$ 為虛數，而a, b分別稱為複數z之實部(*real part*)與虛部(***imaginary part***)。

令z_1, z_2均為複數，且$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$，則複數運算規則可說明如下

相等：$z_1 = z_2 \text{ if } a = c \text{ and } b = d$

加法：$z_1 + z_2 = (a+b) + (b+d)i$

減法：$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$

乘法：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a+bi)(a+di) = a(c+di) + bi(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bdi^2 + (ad+cb)i \\ &= (ac-bd) + (ad+cb)i \end{aligned}$$

複數

若 $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1-2i$，試求 $z_1 + z_2, z_1 z_2$,及 $\bar{z}_1$.

Solution

(1) $z_1 + z_2 = (2+3i) + (1-2i)$
$= (2+1) + (3-2)i$
$= 3 + i$

(2) $z_1 z_2 = (2+3i)(1-2i)$
$= 2(1-2i) + 3i(1-2i)$
$= 2 - 4i + 3i - 6i^2$
$= 8 - i$

(3) $\bar{z}_1 = 2 - 3i$

複數矩陣

令 $A=\begin{bmatrix}2+i & 3-2i\\ 4 & 5i\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 2i\\ 1+i & 2+3i\end{bmatrix}.$

計算 $A+B, 2A,$ 及 $AB.$

Solution

$$A+B=\begin{bmatrix}2+i & 3-2i\\ 4 & 5i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2i\\ 1+i & 2+3i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+i+3 & 3-2i+2i\\ 4+1+i & 5i+2+3i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5+i & 3\\ 5+i & 2+8i\end{bmatrix}$$

$$2A=2\begin{bmatrix}2+i & 3-2i\\ 4 & 5i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2i & 6-4i\\ 8 & 10i\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2+i & 3-2i\\ 4 & 5i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2i\\ 1+i & 2+3i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2+i)3+(3-2i)(1+i) & (2+i)(2i)+(3-2i)(2+3i)\\ (4)(3)+(5i)(1+i) & 4(2i)+(5i)(2+3i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11+4i & 10+9i\\ 7+5i & -15+18i\end{bmatrix}$$

共軛轉置矩陣

- 矩陣A之共軛矩陣註記為，其各元素均為矩陣A各對應元素之共軛複數；此外矩陣A之共軛轉置矩陣註記為A^*，而$A^* = \overline{A}'$。

  若$A=\begin{bmatrix}2+3i & 1-4i\\ 6 & 7i\end{bmatrix}$，則 $\overline{A}=\begin{bmatrix}2-3i & 1+4i\\ 6 & -7i\end{bmatrix}$

  而$A^*=\overline{A}^*=\begin{bmatrix}2-3i & 6\\ 1+4i & -7i\end{bmatrix}$

- 若一方陣C滿足$C=C^*$，則稱該矩陣為**Hermitian**矩陣。

  $\overline{C}=\begin{bmatrix}2 & 3+4i\\ 3-4i & 6\end{bmatrix}$; 而$C^*=\overline{C}'=\begin{bmatrix}2 & 3-4i\\ 3+4i & 6\end{bmatrix}=C$，

  因此C為Hermitian矩陣。

共軛轉置之性質

令A、B為複矩陣，z為複數

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$ 矩陣加法之共軛轉置
2. $(zA)^* = A^*$ 純量乘積之共軛轉置
3. $(AB)^* = B^*A^*$ 矩陣乘法之共軛轉置
4. $(A^*)^* = A$

反矩陣

定義：

令矩陣A為一$n \times n$方陣，若矩陣B滿足$AB = BA = I_n$，則矩陣A稱為可逆(*invertible*)，而矩陣B稱為矩陣A之反矩陣(*inverse*)；若無矩陣B可滿足上式，則矩陣A稱為不可逆(*no inverse*)。

Example 1

試證明矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 具反矩陣 $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Proof

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

由於$AB = BA = I_2$，因此證明矩陣A有反矩陣B

反矩陣的符號

反矩陣的符號表示與實數倒數的符號表示是類似的，令A為一可逆矩陣，註記其反矩陣為A^{-1}。則有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

令k為一正整數，定義$A^{-k} = (A^{-1})^k$，即

$$A^{-k} = (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k\text{次乘積}}$$

利用高斯喬丹消去法求解反矩陣

令A為一$n\times n$方陣，

1. 將單位矩陣I_n附於矩陣A的右側，形成大型增廣矩陣$[A\ :\ I_n]$
2. 計算矩陣A之列簡梯形。

- 如果所得結果為$[I_n\ :\ B]$的形式，則$B = A^{-1}$。
- 如果無法得到$[I_n\ :\ B]$的形式，亦即左側$n\times n$矩陣並非I_n，即代表矩陣A並非可逆矩陣，當然矩陣A也就沒有反矩陣。

一個$n\times n$矩陣A為可逆，若且唯若該矩陣列等價於I_n

利用高斯喬丹消去法求解反矩陣

試求解矩陣A之反矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$

Solution

$$[A:I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{\substack{R2+(-2)R1\\ R3+R1}}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\underset{(-1)R2}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{\substack{R1+R2\\ R3+(-2)R2}}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1\end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R1+R3\\ R2+(-1)R3}}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1\end{array}\right]$$

$$\text{Thus, } A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 5 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

反矩陣之性質

令A, B分為可逆矩陣，c為非0常數，則

1. $(A^{-1})^{-1}=A$
2. $(cA)^{-1}=A^{-1}/c$
3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^n)^{-1}=A^{-n}$
5. $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

$(A^{-1})^{-1}=A$ 此點可直接由反矩陣之定義導出。由於A^{-1}為A之反矩陣，所以

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

上式亦說明了A為A^{-1}之反矩陣，所以$(A^{-1})^{-1}=A$。

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 欲證明$B^{-1}A^{-1}$為AB之反矩陣，可利用矩陣之運算性質，即

$$AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n$$

同樣地，亦可證明$(B^{-1}A^{-1})(AB)=I_n$，因此可知$B^{-1}A^{-1}$為AB之反矩陣。

線性方程式系統

一個具有m個方程式、n個未知數的系統可以表示以下形式

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}$$

上式可經以下程序改寫成矩陣形式，首先將等號兩側分別表示成行矩陣，即

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}=\overset{B}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

令常數行矩陣為B，則此線性方程式系統可以下列矩陣形式表示 $\Rightarrow \boxed{AX=B}$

線性方程式系統

定義：
歐姆定律(*Ohm's law*) 電流I通過電阻R時之電壓坡降ΔV等於該電流與電阻之乘積，即$\Delta V=IR$。

通過電阻之電壓坡降為V_1-V_2，而通過電阻之電流為I_1，因此由歐姆定律可知$V_1-V_2=I_1R$，電流I_1通過電阻後仍以I_1輸出，因此$I_1=I_2$，將此二方程式以下列標準形式寫出

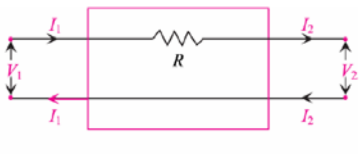

圖 2.5

$$V_2=V_1-RI_1$$
$$I_2=0V_1+I_1$$

改寫成單一矩陣形式，則有 $\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

即轉換矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

線性方程式系統

求解線性方程式系統

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Solution

將系統改寫成下列矩陣形式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

若係數矩陣為可逆，則系統有唯一解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

此係數矩陣之轉換已於例題2求得，利用該結果則得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即系統之唯一解爲 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1.$