應用光學

劉承揚

光的古典本質是光頻電磁波

- 19世紀，Maxwell建立了古典電磁理論，把光學現象和電磁現象聯繫起來，指出光也是一種電磁波，即光頻範圍內的電磁波，從而產生了光的電磁理論。
- 電磁場方程式和物質方程式：

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$

$$J = \sigma E$$

H 磁場強度向量
E 電場強度向量
D 電位移強度向量
B 磁感應強度向量
ρ 自由電荷密度
J 自由電荷電流密度
ε 介電常數
μ 導磁率
σ 電導率
ε_0和μ_0真空中的介電常數和導磁率

簡化之電磁場方程式和物質方程式

- 在絕大多數的光學問題中，遇到的物質是介電質，於是 ρ=0、J=0、μ_r＝1，所以方程式可簡化為：

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$D = \varepsilon E$$

$$B = \mu_0 H$$

其中Hamilton算符 $\nabla = x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}$

電磁場運動方程式

- 經過標準的向量運算可得：

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 H - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

其中**Laplace**算符 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

電磁場運動方程式

- 與波動方程式比較 $\nabla^2(\ )-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\ )=0$
- 電磁波的傳播速度應為 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$
- 在真空中 $\varepsilon=\varepsilon_0$

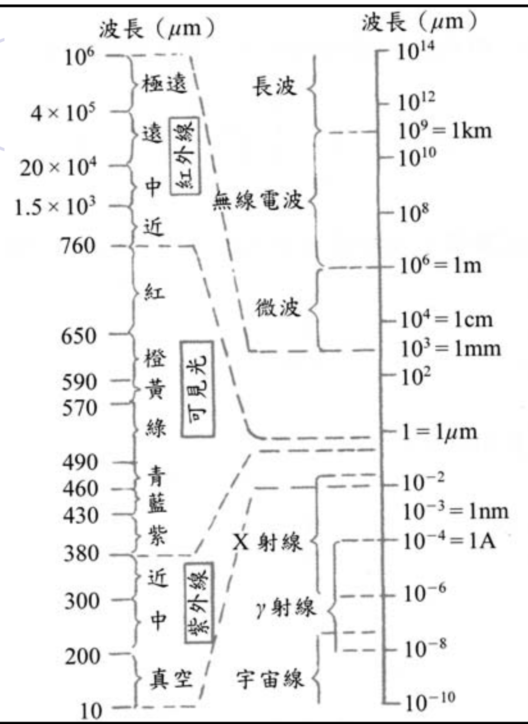
$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.99794\times10^8 m/s$$

$$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2(F/m)$$
$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}N\cdot s^2/C^2(H/m)$$

介質折射率

- 光速與介質折射率 $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{c}{n},n=\sqrt{\varepsilon_r}$
- 因為$\varepsilon_r>1$，所以$v<c$，即介質中的光速總是小於真空中的光速。
- 若n為實數，即為透明介質。
- 若n為複數，即為非透明介質，虛部描述介質對光的吸收損耗。
- 通常介質折射率n是頻率的函數，表明不同頻率的電磁波具有不同的傳播速度，亦稱為介質的色散效應。

電磁頻譜



光頻範圍頻譜

紅外線（1 mm～0.76 μm）
- 遠紅外　1 mm～20 μm
- 中紅外　20～1.5 μm
- 近紅外　1.5～0.76 μm

可見光（760～380 nm）
- 紅色　760～650 nm
- 橙色　650～590 nm
- 黃色　590～570 nm
- 綠色　570～490 nm
- 青色　490～460 nm
- 藍色　460～430 nm
- 紫色　430～380 nm

紫外光（400～10 nm）
- 近紫外　380～300 nm
- 中紫外　300～200 nm
- 真空紫外　200～10 nm

光波長、光頻率和光速

- 在真空中，光波長λ_0、光頻率v和光速c之間的基本關係：

$$c = \lambda_0 v$$

- 在介質中：

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{\lambda_0}{n}$$

- 頻率不變，波長變短

光的量子本質是光子

- 20世紀初，Einstein建立了光的量子理論，認為光不僅是一種電磁波動，而且是一種粒子，光是由一份一份的光量子(光子)組成的，並以速度c運動的光子流。

- 光的能量E與光波的頻率v相對應：

$$E = hv(J)$$

- Plank常數 h = 6.626 x 10^{-34} J.s
- 頻率越高，相應的光子能量就越大

用光子能量區分的電磁頻譜

輻射類型		頻率（Hz）	波　長	量子能量（eV）
波區	無線電波	$<10^9$	$>$ 300 mm	$<$ 0.000004
	微　波	$10^9\sim10^{12}$	300～1 mm	0.000004～0.004
區	紅外線	$10^{12}\sim4.3\times10^{14}$	1000～0.76 μm	0.004～1.7
	可見光	$4.3\times10^{14}\sim5.7\times10^{14}$	0.76～0.38 μm	1.7～2.3
	紫外線	$5.7\times10^{14}\sim10^{16}$	0.38～0.01 μm	2.3～40
射線區	X 射線	$10^{16}\sim10^{19}$	10～0.03nm	40～4000
	γ 射線	$>10^{19}$	$<$ 0.03nm	$>$ 40000

光子的質量

- Einstein相對論公式　$E = mc^2$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- 光子的運動質量　$m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{hv}{c}$

- 不同頻率的光子質量不同，頻率越高，質量越大。

光子的動量

- 有質量m和運動速度c的粒子一定有動量，光子的動量：

$$p = |p| = mc = \frac{hv}{c^2} \cdot c = \frac{hv}{c}$$

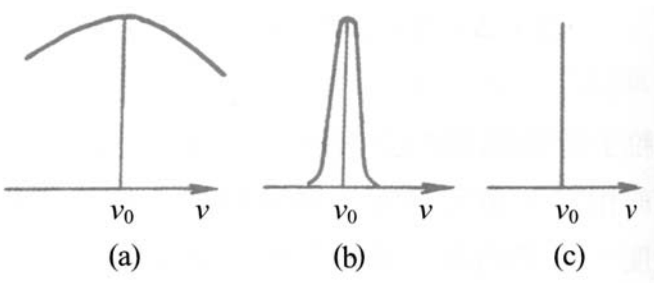
- 因為 $c = \lambda_0 v$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda_0}$$

- 說明光的波長越短，光子的動量越大。

基本的電磁波

- 單色平面波和球面波
- 可稱為電磁波的基本單元波，意思是任何複雜的電磁波都可以用這兩個基本波的疊加來表示。
- 從電磁波譜的意義上來看，我們通常遇到的光波可以分為三種情況：
  - 複色波
  - 準單色波
  - 單色波



電磁振動方程式

- 單色平面波和球面波都是波動方程式的特解
- 在空間固定點觀察，電磁振動方程式可用餘弦函數表示：

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

- 亦可用複數表示：

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t + \phi_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} e^{i(\omega t + \phi_0)}$$

單色波之波動方程式

- 將特解代入電磁場運動方程式，單色波之波動方程式為：

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu_0 \varepsilon E = 0$$
$$\nabla^2 H + \omega^2 \mu_0 \varepsilon H = 0$$

- 令 $k = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$
- 即可得到Helmholtz方程式：

$$\nabla^2 E + kE = 0$$
$$\nabla^2 H + kH = 0$$

單色波之波動方程式

- 從Helmholtz方程式可看出，電場E和磁場H滿足的方程式完全相同，在波的傳播中起相同的作用。
- 對光與物質的作用來說，E和H的作用並不相同。

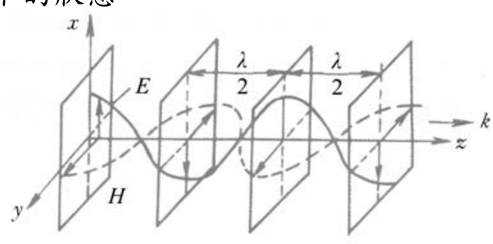
- 實驗證明，使照相底片感光的是電場，對人眼視網膜起作用的也是電場。
- 所以通常把電向量E稱為光向量，把E的振動稱為光振動。
- 因此，單色平面波的解為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t \pm kz + \phi_0)} = E\cos(\omega t \pm kz + \phi_0)$$

單色波之波動方程式

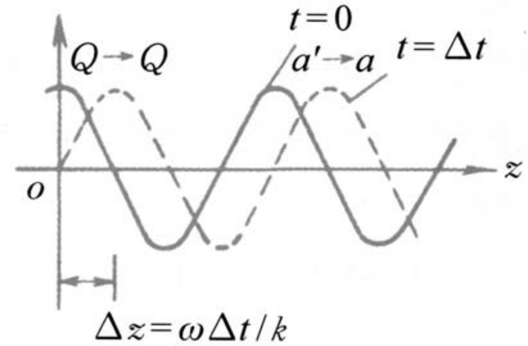
- 假設平面波是沿z軸傳播，即波向量k平行z，所以kz = k・z。
- 由於▽・E=0，E一定要與k垂直，即E向量位於xy平面內，所以光波是橫波。
- 令 $\phi = \omega t \pm kz + \phi_0$ $\Longrightarrow$ $E = E_0 \cos\phi$

- ϕ為平面波的相位，它是時間和空間的函數，表示平面波在任一時空座標下的狀態。



單色波之波動方程式

- 波動是相位的傳播。
- 使用等相位(ϕ=常數)來描述單色平面波，因為在任一時刻，例如t=0， ϕ=kz=常數。
- 波的傳播可理解為等相位面平面隨著時間t沿傳播方向推進。



單色平面波的重要參數

- 振動頻率v
- 空間波長λ
- 波速V
- 波振幅和光強度
- 初相位和複色波
- 波的偏振(光波的向量性)

振動頻率

- 當波在空間固定點(z=常數)，看到的是波動過程的振動。
- 振動相位隨時間變化，餘弦函數的週期是2π，即振動向量E在一個振動週期T相位變化2π，於是：

$$\int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^T \omega dt$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v$$

- ω表示每秒內振動相位的變化值稱為角頻率，v表示每秒振動的週期數稱為振動頻率，單位是Hz。
- 在可見光頻段，不同頻率的光波在人的視覺上顯示出不同的顏色。
- 不同的頻率的光波在介質中將顯示出不同的傳播特性。

空間波長

- 波長描述波動的空間週期
- 當t=0時，波的相位變為空間的函數： $\phi = kz + \phi_0$
- 若空間週期為λ，則有：

$$\int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{\lambda} kdz$$

$$\Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- 波數k可稱為空間角頻率，而波長的倒數稱為波傳播方向上的空間頻率f，即：

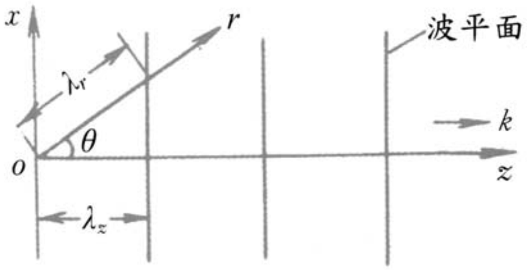
$$f = \frac{1}{\lambda}$$

空間波長

- 波動的空間頻率是觀察方向的函數。
- 當光波在傳播方向(z軸)傳播時，波長是λ，但是若在方向觀察時，波的空間週期變為λ$_r$，相應的空間頻率變為：

$$f_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{\cos\theta}{\lambda}$$

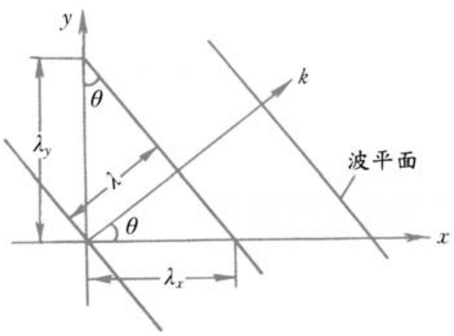
- 當$\theta = \pi/2$時，x方向的空間頻率為0。



例題一

- 如果單色平面波在xy平面內沿著θ方向傳播，寫出平面波表示式，並求x、y、z和z方向的空間頻率
- 假定在xy平面中任意位置向量(即觀察方向)，用r表示：

$$r = xx_0 + yy_0$$
$$k = k_x x_0 + k_y y_0$$
$$k \cdot r = k_x x + k_y y$$



- 波動方程為：

$$E = E_0 \cos(\omega t - k \cdot r + \phi_0) = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi_0)} = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y + \phi_0)}$$

例題一

- 空間頻率為：
  - k方向的空間頻率 $f = \frac{1}{\lambda}$
  - x方向的空間頻率 $f_x = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{\cos\theta}{\lambda}$
  - y方向的空間頻率 $f_y = \frac{1}{\lambda_y} = \frac{\sin\theta}{\lambda}$
  - z方向的空間頻率 $f_z = \frac{1}{\lambda_z} = \frac{1}{\infty} = 0$
- 因為 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2, k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$
- 空間頻率相互的關係為：

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2$$

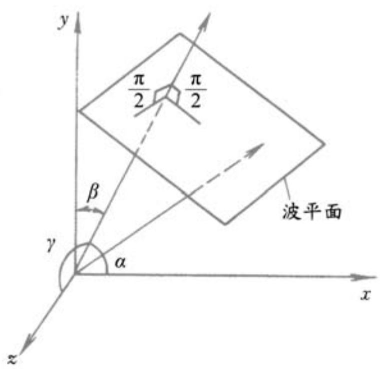
例題一

- 因此在三維空間任意方向傳播的單色平面波的波動方程為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k\cdot r + \phi_0)} = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi_0)}$$

- 考慮相互關係：

$$k_x = k\cos\alpha$$
$$k_y = k\cos\beta$$
$$k_z = k\cos\gamma$$



- 波動方程可改寫為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k\cos\alpha\cdot x - k\cos\beta\cdot y - k\cos\gamma\cdot z + \phi_0)}$$

例題一

- 空間頻率的相互關係：
$$f_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$
$$f_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$
$$f_z = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$
- 波動方程又可改寫為：
$$E = E_0 e^{i[\omega t - 2\pi(f_x x + f_y y + f_z z) + \phi_0]}$$
- 資訊光學中推廣空間頻率概念，認為任何週期性的光強度變化可用空間頻率來描述，例如每毫米長度上100條光柵線的空間頻率就是100條/mm。

波速V

- 光頻電磁波的速度為 $V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$ $\because k = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$
- 單色平面波的速度可表示為 $V = \frac{\omega}{k}$
- 從波動就是相位的傳播，因而波速應等於波等相點傳播的速度，也可以求得波速。
- 將 $\phi = \omega t \pm kz + \phi_0$ 對時間t求導數，且單色平面波的初相位是固定不變的，因此
$$\frac{d\phi}{dt} = \omega - k\frac{dz}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow V = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

波傳方向

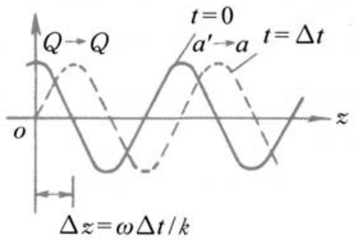
- 波前進的方向由k決定，但在同一方向上有正負之分。令：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E\cos(\omega t - kz)$$

- 式中wt和kz反號，令t=0，波形曲線如圖所示。
- 觀察Q點的運動。
- Q點的位置相應於z=0，所以Q點的相位ϕ=0。若經過時間△t之後，相位(ϕ=0)不變的情況下：

$$\omega \Delta t = kz$$

$$z = \frac{\omega \Delta t}{k} > 0$$



- 如圖虛線所示，波向正z方向前進，稱為右行波。

波傳方向

- 同理，若令 $E = E_0 e^{i(\omega t + kz)} = E\cos(\omega t + kz)$
- 經過時間△t之後 $z = -\frac{\omega \Delta t}{k} < 0$
- 表示波向負z方向前進，稱為左行波。
- 如果波動方程式中wt與kz符號相反，就是右行波，波沿正z方向傳播。
- 如果波動方程式中wt與kz符號相同，就是左行波，波沿負z方向傳播。
- 波速V是描述單色平面波等相位面向前推進的速度，又可稱為波的相速。

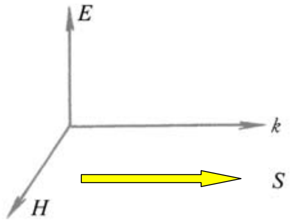
波振幅和光強度

- 波振幅定義為波振幅向量的長度，即 $E = |E|$
- 電磁理論中，描述波動能量傳播的參數是能流向量S，亦稱為Poynting向量，定義為

$$S = E \times H$$

- 單位時間垂直通過傳播方向上單位面積的電磁能量。
- 由 $\nabla \cdot E = 0, \nabla \cdot H = 0$ 可知，E、H和波向量k三者一定互相垂直，即電磁波一定是橫波，因此可求出：

$$S = EH\frac{\vec{k}}{k} = EHk_0$$



- 式中k_0是k的單位向量

波振幅和光強度

- S和k同方向，因為：

$$E = E_0 \cos(\omega t - k \cdot r)$$
$$H = H_0 \cos(\omega t - k \cdot r)$$
$$\Rightarrow S = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - k \cdot r) \cdot k_0$$

- 因為光的頻率太高，至今還沒有能直接響應光頻的探測器，因此對光波強度的量測是時間平均的結果：

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 k_0$$

$$\because \sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon} E, V = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} \Rightarrow \langle S \rangle = I k_0$$

- 光強度I (W/m^2)

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon V E_0^2$$

初相位和複色波

- 對單色波來說，初相位ϕ_0是指t=0、z=0初始條件下的波相位，且一定是常數。
- 若初相位不是常數，那就表示是複色波。
- 複色波是單色波的疊加：$E=\sum_i E_i\cos(\omega_i t+k_i z+\phi_i)$
- 複色波是十分複雜的波形，為了說明簡單，限定w在w_0附近變化，這樣準單色波可表示為：

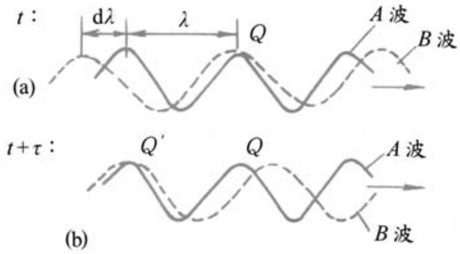
$$E=E_0\cos(\omega_0 t+\phi(t))=E_0\cos\phi(t)$$

- 角頻率定義為相位的時變率：$\omega=\frac{d\phi}{dt}=\omega_0+\frac{d\phi_0}{dt}$
- 頻率的變化範圍為：

$$\Delta\omega=\omega-\omega_0=\frac{d}{dt}\phi_0(t)$$

初相位和複色波

- 求複色波的能量傳播速度(群速)的表示式。
- 假定波群只由兩個波長相差很少的A、B波組成
  - A波的波長λ、傳播速度ν
  - B波的波長λ’ = λ+dλ、傳播速度 $\nu'=\nu+\frac{d\nu}{d\lambda}d\lambda=\nu+d\lambda$
- 在某一時刻t，A、B波的波峰在Q點重合形成波群的合成波峰，代表了波群的運動。



初相位和複色波

- 經過某一時間τ之後，兩波的波峰在Q’點重合，表示波群從Q點移動到Q’點，即$\overline{QQ'}=\lambda$
- 相對介質而言，波群運動速度相對A波要慢λ/τ，於是合成波速為：

$$v_g = v - \frac{\lambda}{\tau}$$

- 因為B波相對A波的速度為ν’-ν，所以：

$$\tau = \frac{d\lambda}{v'-v} = \frac{d\lambda}{\left(v+\frac{dv}{d\lambda}d\lambda\right)-v} = \frac{d\lambda}{dv}$$

- 於是：

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = v - \beta\lambda$$

- β是色散係數

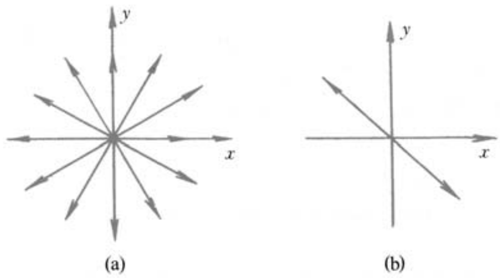
初相位和複色波

$$\beta = \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$$

- β>0稱為正常色散，$\frac{dn}{d\lambda}<0, v_g<v$
- β<0稱為反常色散，$\frac{dn}{d\lambda}>0, v_g>v$
- 群速可以大於相速，也可以小於相速，但是v_g一定小於真空中光速c。

波的偏振(光波的向量性)

- 光波是橫波，意指E在傳播過程中始終位於垂直於傳播方向的橫截面內。在這個橫截面內，電場向量的取向性就是波的偏振。
- 朝著波傳播方向看去，E在橫截面中隨機變化，或者說在360度範圍內等機率分佈，稱為非偏振光或自然光。
- 如果E的方向固定不變或按確定規律變化，則稱偏振光。



波的偏振(光波的向量性)

- 將E在xy平面分解：$E = E_x + E_y = E_x x_0 + E_y y_0$

$$\because E = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_0)$$
$$\Rightarrow E = (E_{x0} x_0 + E_{y0} y_0)\cos(\omega t - kz + \phi_0)$$

- 因此E向量的兩個獨立分量為：

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$E_y = E_{y0}\cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

- E向量的軌跡方程式為：

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos(\phi_x - \phi_y) = \sin^2(\phi_x - \phi_y)$$

波的偏振(光波的向量性)

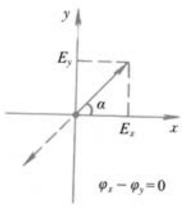
- E向量的軌跡方程式是一個橢圓方程。
- 如果(ϕ_x-ϕ_y)完全隨機變化，橢圓的取向也隨機變化。
- 如果(ϕ_x-ϕ_y)為恆定值，則橢圓確定，表示E在傳播過程中始終沿著橢圓運動，稱為橢圓偏振光。

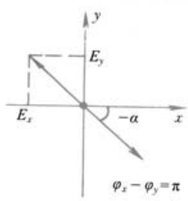
- 若(ϕ_x-ϕ_y)=mπ ，m=0, ±1, ± 2,⋯
  - 此時cos (ϕ_x-ϕ_y)= ± 1, sin (ϕ_x-ϕ_y)=0，橢圓方程變為：

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \pm \frac{E_y}{E_{y0}}$$

- 這是直線方程，直線的方位由E_{x0}和E_{y0}的相對大小決定。

波的偏振(光波的向量性)





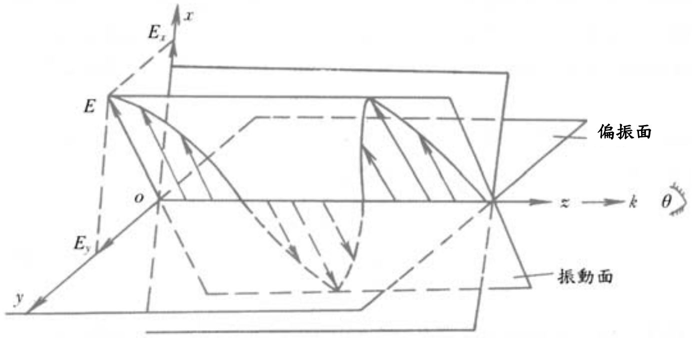
- 方位角為： $\alpha = \pm \arctan \frac{E_{y0}}{E_{x0}}$

- 式中取+號時，E_x和E_y同相變化
- 式中取-號時，E_x和E_y反相變化

- 傳播過程中E向量始終在該質線上變化，所以稱為線偏振光

波的偏振(光波的向量性)

- 從空間波形曲線的角度來看



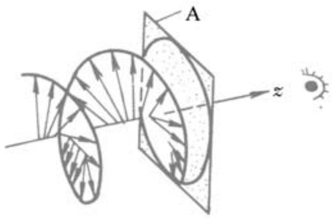
- E始終在同一方位的平面內變化，這平面叫振動面，垂直於該平面的平面叫偏振面

波的偏振(光波的向量性)

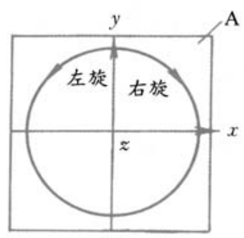
- 若(ϕ_x-ϕ_y)=±π/2，橢圓方程變為：

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2=1$$

- 這是一個標準的橢圓方程式，相應的光叫橢圓偏振光。
- 橢圓的方向由E_{x0}和E_{y0}的相對大小決定。
- 當E_{x0}=E_{y0}時，方程式退化成圓方程式，稱為圓偏振光。



(a)



(b)

波的偏振(光波的向量性)

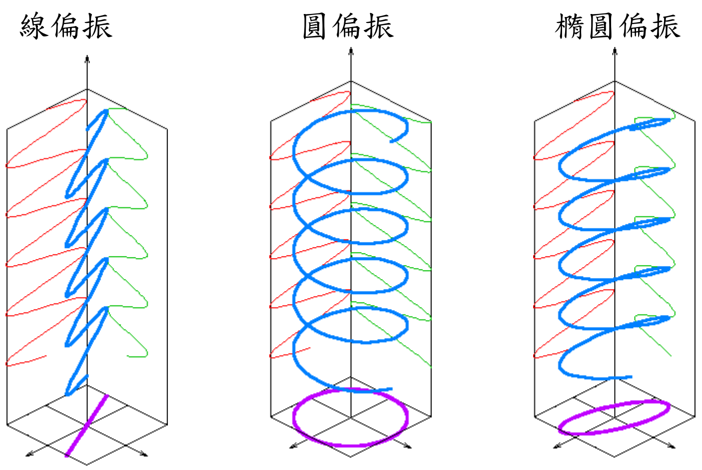
- 朝著光傳播方向看去，順時針方向旋轉的E稱為右旋轉圓偏光，逆時針方向旋轉的E稱為左旋轉圓偏光。
- 右旋方程式

$$E_x = E_0 \cos\phi$$
$$E_y = -E_0 \sin\phi$$

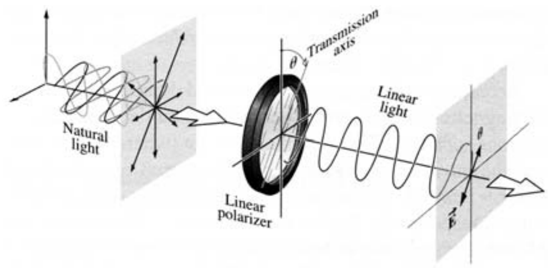
- 左旋方程式

$$E_x = E_0 \cos\phi$$
$$E_y = E_0 \sin\phi$$

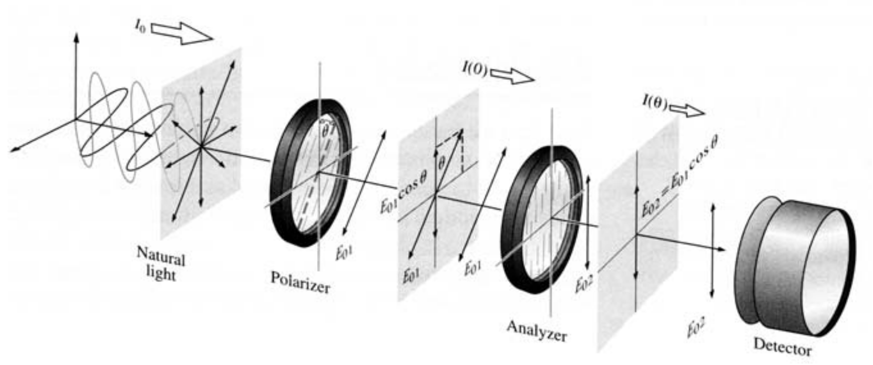
波的偏振(光波的向量性)



Polarizer



Malus's law



$$I(\theta) = I(0)\cos^2\theta$$

Brewster's angle

- $n_1 \rightarrow n_2$

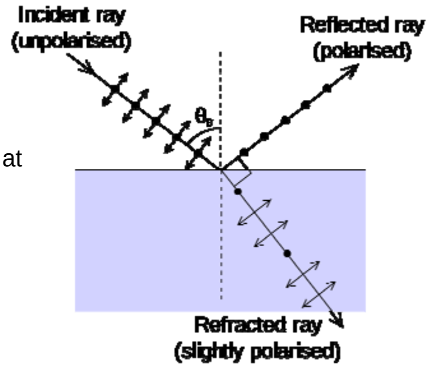
$$\theta_1 + \theta_2 = 90°$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

we can calculate the incident angle $\theta_1 = \theta_B$ at which no light is reflected:

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90° - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B$$

$$\Rightarrow \theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$



Brewster's angle

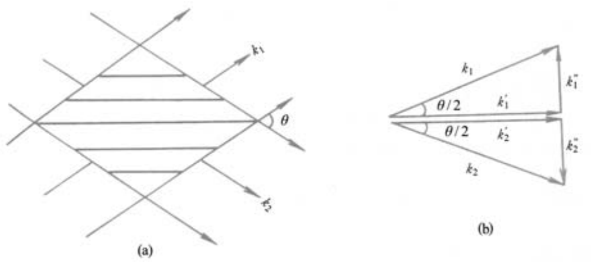
兩個單色平面波的干涉

- 具有相同頻率和振幅向量，但傳播方向和初始相位不同的單色平面波：

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_1 \cdot r + \phi_1)}$$
$$E_2 = E_0 e^{i(\omega t - k_2 \cdot r + \phi_2)}$$

- 兩個波干涉時，干涉條紋一定在兩個波向量角平分線方向走向，因此我們把波向量分解：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{k}_1' + \boldsymbol{k}_1'' \equiv \boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}'' \\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{k}_2' + \boldsymbol{k}_2'' \equiv \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}'' \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1' &= \boldsymbol{k}_2' = \boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{k}_1'' &= -\boldsymbol{k}_2'' = \boldsymbol{k}'' \end{aligned}\right\}$$



兩個單色平面波的干涉

- 合成電場為：

$$E = \underbrace{2E_0 \cos(\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{r} - \Delta\varphi)}_{振幅} \quad \underbrace{e^{i(\omega t - k' \cdot r + \varphi)}}_{相位}$$

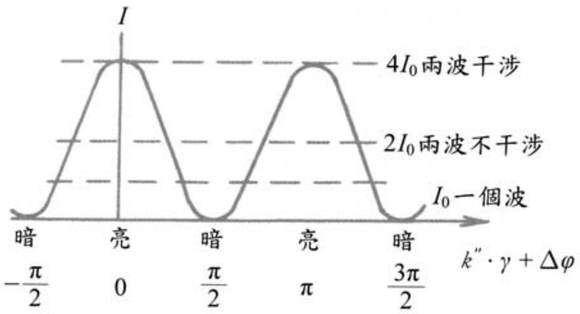
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \Delta\varphi &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \end{aligned}\right\}$$

- 相應的平均強度為：

$$I = \langle E^2 \rangle = E \cdot E^* = 4E_0^2 \cos^2(k'' \cdot r - \Delta\phi)$$

兩個單色平面波的干涉

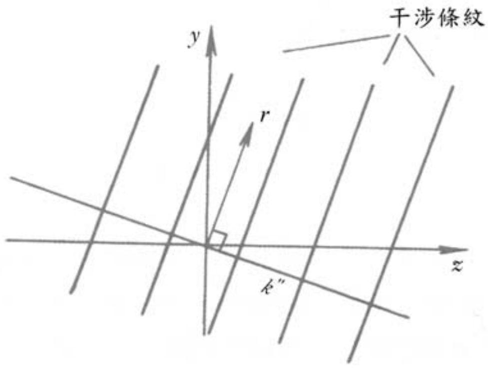
- 穩定干涉場強度與時間無關，與k'也無關，只由 $k''\cdot r-\Delta\phi$ 決定，即只是空間座標的函數。
- 干涉條紋的明暗條件：
  - 合成光強為0，稱為暗條紋 $k''\cdot r-\Delta\phi=(2m+1)\frac{\pi}{2}$ m為整數
  - 合成光強最大，稱為亮條紋 $k''\cdot r-\Delta\phi=m\pi$



干涉條紋的走向

- 所謂干涉條紋的走向，是指合成光強相等點的空間取向。
- 兩個波干涉時，干涉條紋一定在兩個波向量角平分線方向走向。

$$\because k''\cdot r=0\Rightarrow k''\perp r$$

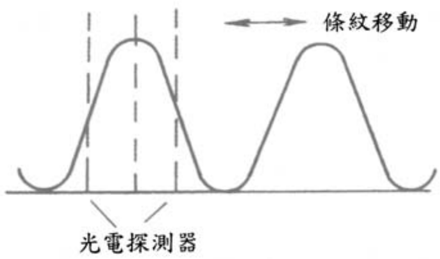


干涉條紋的移動

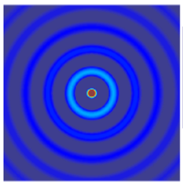
- 在干涉場中固定地點放置光電探測器，這表示r固定，此時合成強度為

$$I = \langle E^2 \rangle 4I_0 \cos^2 \Delta\phi$$

- 可知，當△ϕ隨時間規則變化，或某些原因造成△ϕ變化時，光電探測器上的光強度將隨△ϕ而變。



球面波



- 平面波是球面波的一種極限情況。
- 一個理想點光源所發射的光波就是球面波。
- 從點光源起等距離的空間點構成球面，所以球面波一定沿位置向量r方向傳播，於是 $k \cdot r = kr$
- 球面波方程式為：

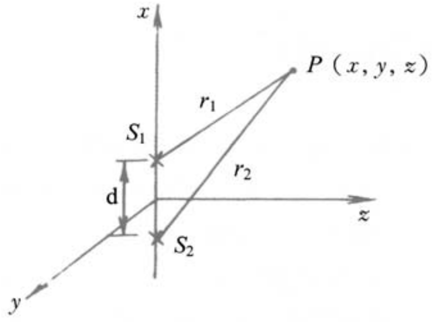
$$E = \frac{E_0}{r}\cos(\omega t - kr + \phi_0) = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \phi_0)}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

- 等相位面時，r=常數
- 振幅反比於r

兩個單色球面波的干涉

- 點光源S_1、S_2發出的球面波在空間的干涉情況更具有一般性。
- 要決定S_1、S_2發出的球面波在整個重疊區域內干涉條紋的形狀、取向，必須首先求出兩點光源干涉的等光程差點的軌跡，因為干涉條紋是由等光程差的各點連接而成的。



兩個單色球面波的干涉

- 根據幾何關係， S_1、S_2與點P的距離分別為：

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$
$$r_2=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

- 因此在P點兩光源的光程差為：

$$\Delta=r_2-r_1=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}-\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

- 消去根號，簡化便得到等光程差面的方程式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}-\frac{z^2+y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}=1$$

兩個單色球面波的干涉

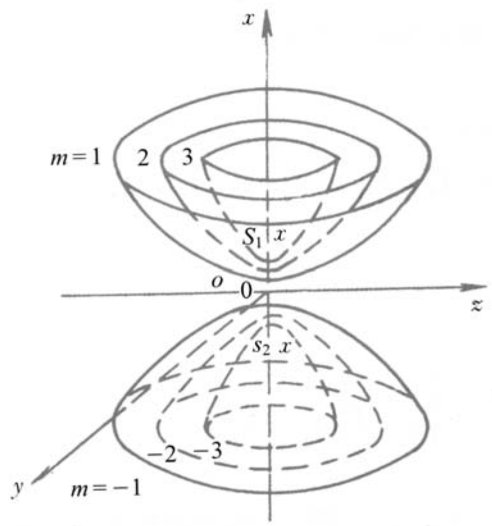
- 當 $\Delta = m\lambda\,(m = 0,\pm1,\pm2...)$ 時，P點光強為4I0，即光強度有極大值，對應亮條紋。
- 代入

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} - \frac{y^2+z^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} = 1$$

- 此方程式表示等光程差面是一組以m為參數的迴轉雙曲面族，x軸為迴轉軸。
- 在觀察屏幕上所看到的干涉條紋就是等光程差面與觀察屏幕的交線。
- 當屏幕設置在z方向上，且與xoy平面平行，在方程式中z為常數，於是交線即干涉條紋是一組雙曲線。

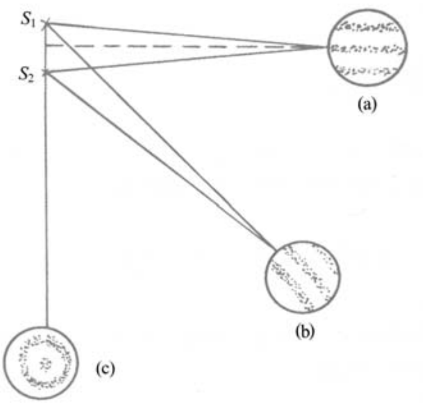
兩個單色球面波的干涉

- 等光程差面



兩個單色球面波的干涉

- 若只考量緊靠z軸附近的條紋，則近似直線，且條紋在S_1和S_2的角平分線方向。
- 圖a就是楊氏干涉實驗，假設z=D，且D>>d。



兩個單色球面波的干涉

$\because r_2^2 - r_1^2 = 2xd$

- 可求出光程差為 $\Delta = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{r_2 - r_1}$
- 若在z軸附近觀察，取近似 $r_2 + r_1 \approx 2D$

$$\Rightarrow \Delta = r_2 - r_1 = \frac{xd}{D}$$

- 條紋的強度分佈公式

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi xd}{\lambda D}\right)$$

兩個單色球面波的干涉

- 極大極小強度點條件為：

$$x=\begin{cases} m\dfrac{D\lambda}{d} \\ \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{D\lambda}{d} \end{cases} \qquad (m=0,\pm1,\pm2...)$$

- 可見條紋垂直於x軸，或平行z軸，m代表條紋的干涉級數。
- 相鄰兩個亮條紋或兩個暗條紋之間的間距為：

$$W=\frac{mD\lambda}{d}-\frac{(m-1)D\lambda}{d}=\frac{D\lambda}{d}$$

- 對確定的D和d，只要測量出W值，即可求出光波長。

實際光源的同調性

- 單色波是一定可以產生干涉的，所以單色波又稱為同調波。
- 相干光波滿足三個條件：同偏振、同頻率、相位差恆定
- 可稱同調條件，相應的光源稱為同調光源
- 光的同調性是討論複色波的同調條件

- 光的同調性通常分為時間同調性和空間同調性
- 時間同調性是指在空間同一點上，兩個不同時刻光波場之間的同調性。或者是說沿著光傳播方向，離開光源不同距離的兩點，在同一時刻光波場之間的同調性。
- 空間同調性是指在同一時刻，垂直於光傳播方向上的兩個不同空間點上光波場之間的同調性。

時間同調性

- 同調時間τ_c和同調長度l_c
- 同調時間是複色光同調性的一個特徵參數。
- 如果複色光的頻帶寬度很大，以致使相位因子成為隨機變量，那同調光場的平均光強度變為：

$$\phi = k'' \cdot r + \Delta\phi$$
$$\Rightarrow I = 4E_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = 2E_0^2$$

- 即同調場的平均強度在整個交疊區域內都等於兩個光場光強之合(強度相加)，不出現干涉條紋，這樣的光波稱為非同調光。

時間同調性

- 光學測量中所用的光源，既非理想的同調光，又非完全的非相干光。

- 理想單色光 $\tau_c \to \infty, l_c = \tau_c$
- 完全非同調光 $\tau_c \to 0, l_c \to \infty$

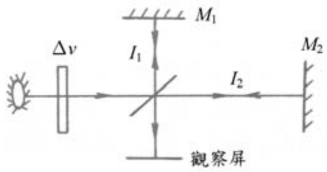
- 理想單色光之同調長度無窮長
- 完全非同調光之同調長度無窮短

- 同調性是指介於兩個極端狀態之間的同調長度為有限值的情況。

時間同調性

- 使用Michelson干涉儀可以實際量測同調時間。
- 當兩列光波的光程$2l_2-2l_1=\Delta l$差小於某一特徵長度l_c時，觀察屏上有干涉條紋出現
- 當$\Delta l>l_c$時，干涉條紋消失
- l_c定義為同調長度
- 相應的同調時間為 $\tau_c = \dfrac{l_c}{c}$
- 從理論實驗發現

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta \nu} \Rightarrow l_c = \frac{c}{\Delta \nu} \Rightarrow l_c = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$$



時間同調性

- 光源的同調長度是由光源單色性來決定。
- 同樣的光波列才能同調，即實現振幅相加，同樣的光波列只能強度相加。
- 光波走完特徵波列長度所需的時間就是同調時間。
- 因此，想要獲得好得時間同調性，必須設法改善光源的單色性，即減小頻寬。
- 對於普通光源來說，可使用窄帶濾光片改善單色性，淡也同時減弱了光強，使的干涉場很弱，而無意義。
- 雷射的特性之一，就是單色性好，強度又強，成為理想的同調光源。

時間同調性

- 準單色光源的譜線寬度和同調長度

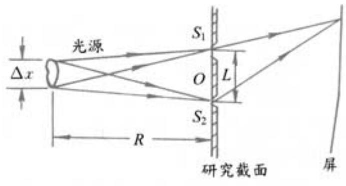
光源譜線 λ（nm）		譜線寬度 Δλ（nm）	同調長度 l_c
氪-86	606.78	0.00047	～77 cm
鈉	589.3	0.6	～0.06 cm
汞	546.1	0.01	～3 cm
氦氖雷射	632.8	10^{-8}	～36 km

空間同調性

- 理想單色平面波和球面波一定是完全空間同調，因為其等相面上任意兩點之間保持固定相位差，所以波陣面上任意兩點的光場一定同調。
- 實際光源則不可能成為理想平面波或球面波，所以不可能獲得完全的空間同調性。
- 當實際光源前方截面上用兩個小孔取得兩個小光源進行干涉實驗，兩個小孔間的距離d，在一定的大小內有干涉條紋，超過這個大小干涉條紋消失，我們把這個距離限制所對應的面積定位同調面積A_c。
- 同調面積越大其空間同調性越好。

空間同調性

- 使用楊氏干涉儀來測定同調面積
- 在光源線度Δx、光源與截面距離R固定不變的條件下，改變兩個小孔間距離L，屏上的干涉條紋發生變化。
- 當L<L_c時，有干涉條紋
- 當L>L_c時，無干涉條紋
- L_c相應的面積為距離R處的同調面積
- L_c由光線線度Δx 、研究距離R以及光波長λ決定，即



$$A_c = L_c^2 \Rightarrow L_c = \frac{\lambda R}{\Delta x} \Rightarrow A_c = \left(\frac{\lambda R}{\Delta x}\right)^2$$

空間同調性

- 當光波長固定時，R越大，Δx越小，同調面積越大，意指光源趨近於點光源。
- 因為R和Δx要實際量測比較困難，所以將同調面積改寫為：

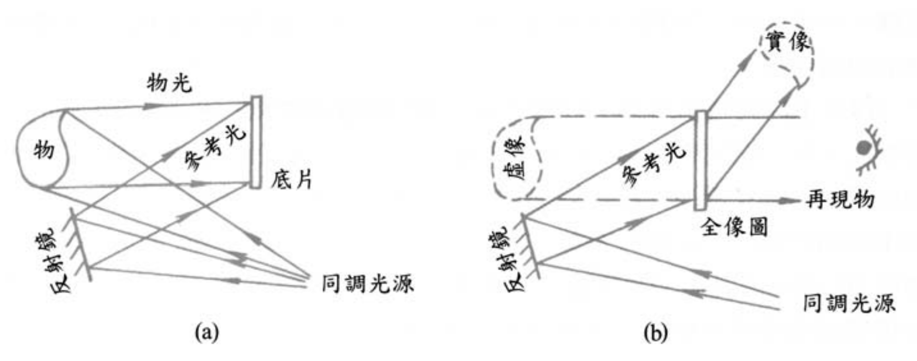
$$A_c = \left(\frac{\lambda}{\theta_s}\right)^2$$

- 式中θ_s= Δx/R表示光源線度對研究截面O點所張得平面角，以弧度計量。
- 只要知道光源對研究截面處所張得角度θ_s就可以求出相應的同調面積。
- R越大，空間同調性越好，但光強變弱。

紀錄光波相位

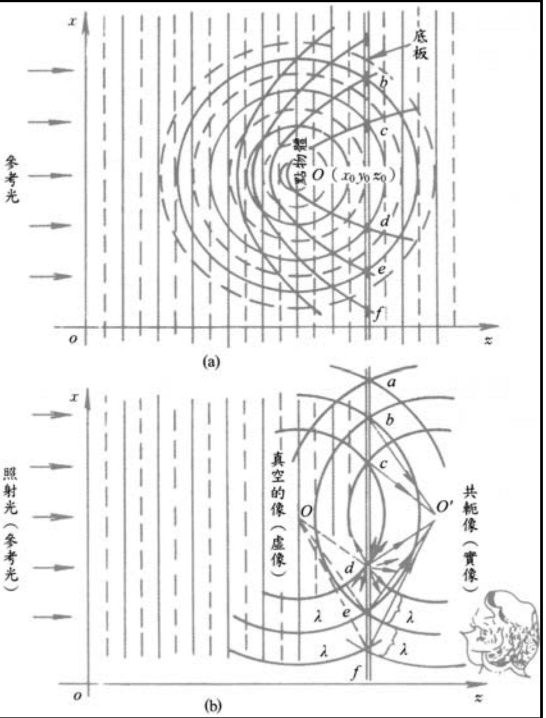
- 使用干涉條紋紀錄光波相位。
- 普通照相是把物體表面反射和散射的光，通過照相鏡頭成像在感光膠片上，在感光膠片上紀錄的只是物體的光強度分佈，得到的是物體的平面像。
- 雷射全像照相術，不用透鏡成像，借助一束參考光與來自物體的反射或散射光在感光膠片上產生干涉，從而紀錄物光的全部訊號，即物光的相位和振幅。
- 其確實的紀錄了物體的三維幾何信息，可以看到物體真實的影像。
- 當變動眼睛的觀察方向時，可以看到物體的側面，即再現的物體是真正的立體像，猶如我們對物體直接觀察一樣。
- 如果全像照片被打碎，用一碎片進行再現，仍能可以觀察到重現像，只是像的清晰度會降低。

紀錄光波相位

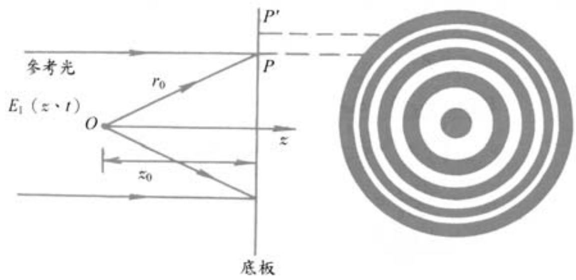


紀錄光波相位

- 用平面參考光照射點物O，點物O的散射光是一發散的球面波。
- 圖上a,b,c…各點到O點的距離是波長的整數倍。
- 點物放在O點，則在O點的散射波的a,b,c…點的相位分佈和把重現光照設在全像圖上，全像圖上的a,b,c…點上的散射波的相位分佈是完全相同的。



紀錄光波相位



- 在全像底片P點上，參考光波和O點散射光波可表示為

$$E_1(z_0,t)=A_1e^{i(kz_0-\omega t)}$$

$$E_2(r_0,t)=\left(\frac{A_2}{r_0}\right)e^{i(kr_0-\omega t)}$$

紀錄光波相位

- 這兩束光在全像底片上干涉疊加，其強度為：

$$I = |E_1 + E_2|^2 = (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = |A_1|^2 + \frac{|A_2|^2}{r_0^2}$$

$$I_2 = \frac{A_1 A_2^*}{r_0} e^{-ik(r_0 - z_0)}$$

$$I_3 = \frac{A_1^* A_2}{r_0} e^{ik(r_0 - z_0)}$$

- I_1是r_0即底片上P點位置的函數，而I_2和I_3之和則正比於cos項，即：

$$I_2 + I_3 \propto \frac{\cos[k(r_0 - z_0) + \phi]}{r_0}$$

紀錄光波相位

- 總光強度是r0的函數，呈現出一系列極大和極小點。
- 參考平面波和散射球面波的干涉，在全像底片上產生出一組圓形干涉條紋，且條紋間距為一個光波長。

- 假定全像底片的響應正比於光強I，所以其變黑度正比餘光強I。
- 全像圖的功率透過率為：

$$1 - T^2 = \alpha I$$

$$\Rightarrow T = (1 - \alpha I)^{1/2} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} I$$

紀錄光波相位

- 用重現光(參考光)照射全像圖，透過全像突的光場信號為：

$$E(z_0, r_0, t) = E_1(z_0, t) = v_1 + v_2 + v_3$$

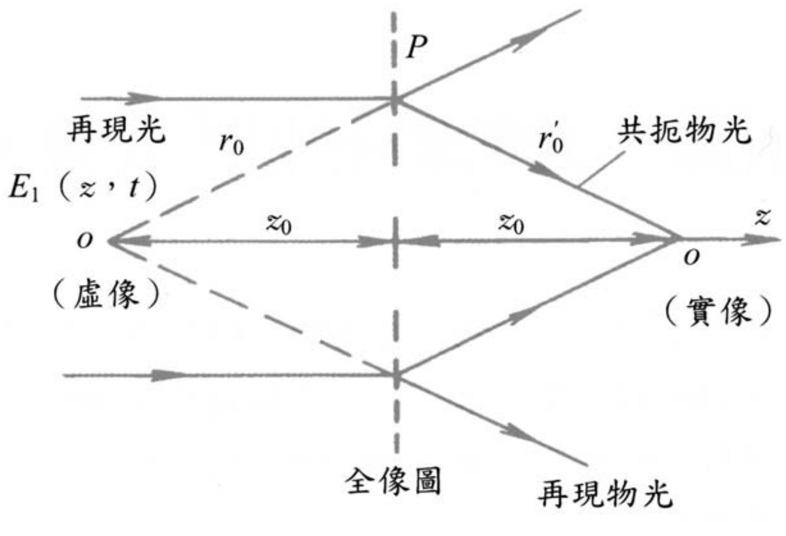
$$v_1 = (1-\alpha)\frac{|A_1|^2}{2} - \alpha\frac{|A_2|^2}{2r_0^2}E_1(z_0, t)$$

$$v_2 = -\alpha\frac{A_1^2 A_2^*}{2r_0}e^{i(2kz_0 - kr_0 - \omega t)}$$

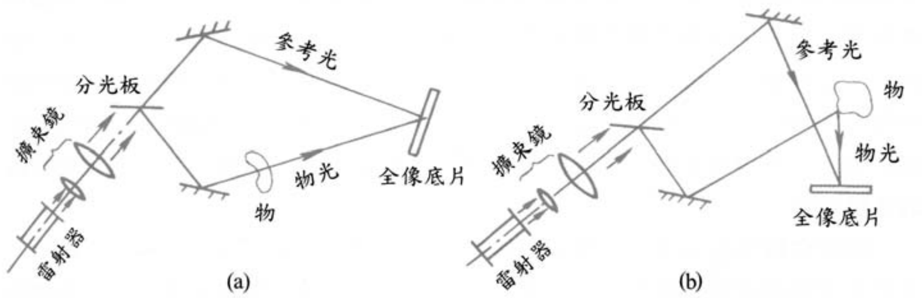
$$v_3 = -\alpha\frac{|A_1|^2 A_2}{2r_0}e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

- v1與重現光波相同的平面波，強度上受到衰減
- v2是向O'點會聚的球面波
- v3是與點物O完全相同的球面波，即重現的物光，可看到虛像。

紀錄光波相位



紀錄光波相位



- 全像術要求同調性很高的光源。
- 全像圖是參考光和物光干涉條紋的紀錄，所以在曝光期間要求實驗裝置有很高的機械穩定性。
- 可以用於測量用常規方法無法精確測量的物體形變或形狀等。
- 非拋光面的形狀複雜的表面檢查、微小形變、微小振動、高速運動等。