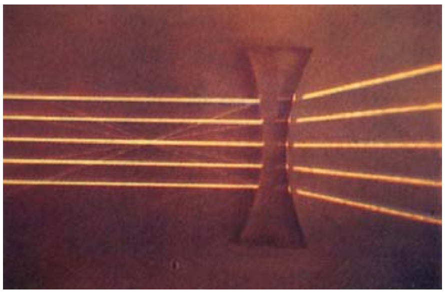
工程光學-薄透鏡系統

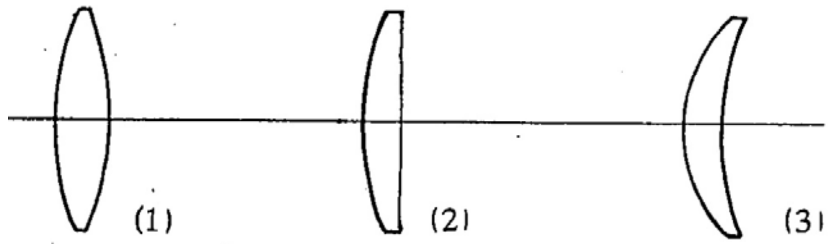
劉承揚

透鏡

- 一般的光學系統中最常用的元件為透鏡(lens)
- 透鏡是將一塊透明材料的兩面磨成球面、平面而形成
- 透鏡可分為凸透鏡(convex lens)與凹透鏡(concave lens)

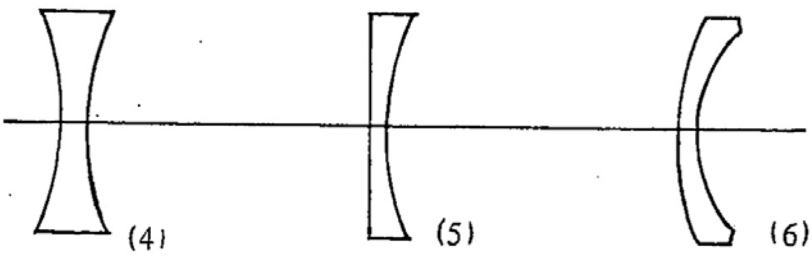



凸透鏡



- (1)雙凸透鏡(biconvex lens)，兩邊的曲率半徑分別為$r_1>0$和$r_2>0$
- (2)平凸透鏡(plano-convex lens)，將兩面中的一面磨成平面，若$r_1>0$則$r_2=\infty$ ，若$r_1=\infty$則$r_2<0$
- (3)月凸透鏡(positive meniscus lens)，其曲率半徑有相同的正負號，若r_1和r_2皆為正值則$r_2>r_1$，若r_1和r_2皆為負值則必須滿足$|r_1|>|r_2|$

凹透鏡



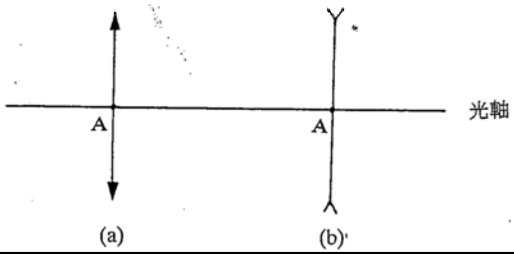
- (4)雙凹透鏡(biconcave lens)，兩邊的曲率半徑分別為$r_1<0$和$r_2>0$
- (5)平凹透鏡(plano-concave lens)，將兩面中的一面磨成平面，若$r_1=\infty$則$r_2>0$ ，若$r_2=\infty$則$r_1<0$
- (6)月凹透鏡(negative meniscus lens)，此透鏡的兩曲率半徑相同，同時為正時，$r_1>r_2$，同時為負時，則$|r_2|>|r_1|$

薄透鏡和厚透鏡

- 透鏡兩曲面圓心的連線稱之為此透鏡的光軸
- 兩曲面頂點間光軸的長度稱為透鏡的厚度，以t表示
- 當t與透鏡的其他尺寸(曲率半徑、焦距、物距等)相比，不能被忽略掉時，稱之為厚透鏡(thick lens)
- 當t與透鏡的其他尺寸相較下可以忽略不計時，稱之為薄透鏡(thin lens)
- 因為薄透鏡的厚度可以忽略，所以在畫成代表符號時可將之視為一個具有兩曲率半徑和折射率的一條直線

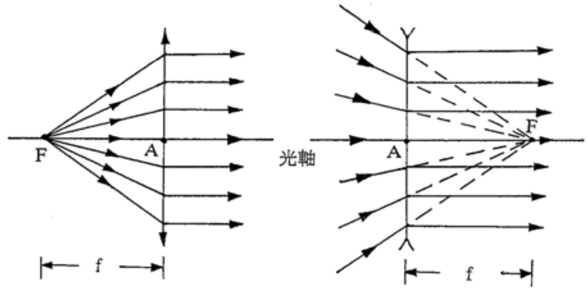
薄透鏡

- 當薄透鏡為凸透鏡時，符號為圖(a)
- 當薄透鏡為凹透鏡時，符號為圖(b)
- 圖中A點表示薄透鏡的兩頂點重合，為透鏡的中心點
- 對薄透鏡而言，在計算物距、像距、焦距等時，都是從A點開始計算



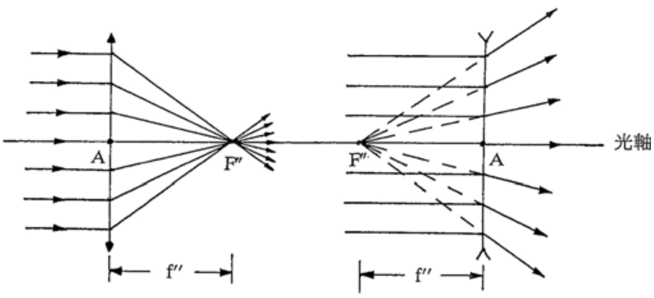
薄透鏡的焦點和焦距

- 第一焦點F、第一焦距f
- 由第一焦點所發出的光線，經過薄透鏡後平行於光軸射出
- 在第一焦平面上且離軸的點光源所發出的光線，經過透鏡後，會形成一束與軸夾角θ的平行光束



薄透鏡的焦點和焦距

- 第二焦點F”和第二焦距f”
- 一平行於光軸的平行光束，經過透鏡後，必會聚於第二焦點上
- 與軸夾角θ的平行光束經過透鏡後，也必會聚於第二焦平面上

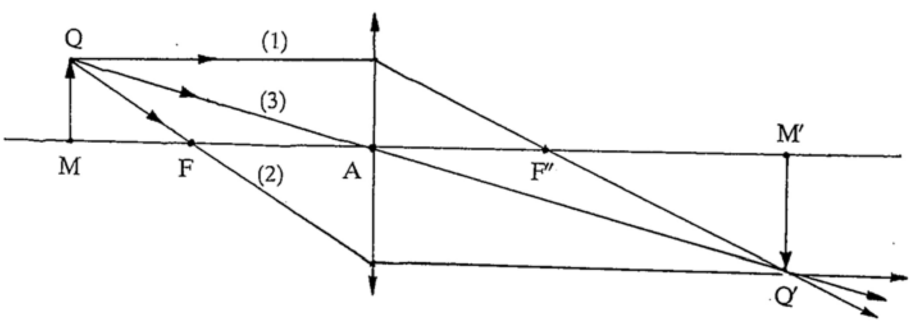


圖解成像法

- 我們可利用已知路徑的光線繪圖法，將成像的位置和大小決定出來
- 光線的已知路徑：
  - 一為通過第一焦點的入射光線，經薄透鏡後平行於光軸射出
  - 另一條光線是平行於光軸的入射光線，經薄透鏡後，通過第二焦點
  - 假設薄透鏡是放在均勻的介質中，也就是其左右邊的環境介質是相同的，那通過透鏡中心的光線是不偏折的
- 利用上述三條光線的任二條即可將成像位置、大小和性質求出，稱為平行光線繪圖法

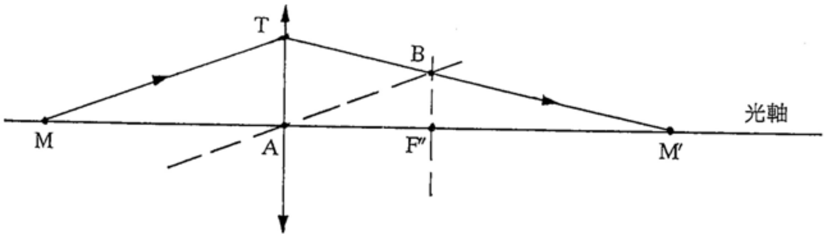
平行光線繪圖法

- 三條光線求成像位置



斜線繪圖法

- 從軸上物點M畫出一條斜線$\overline{MT}$
- 由於在均勻的介質環境中，過A點的光線不偏折，所以過A點做平行於$\overline{MT}$的輔助線$\overline{AB}$
- $\overline{AB}$與第二焦平面焦於B點
- $\overline{MT}$與$\overline{AB}$這兩條平行光會相聚於第二焦面上，所以$\overline{MT}$入射光經過薄透鏡後，折射光也會通過B點，其與光軸的焦點M'就是M的像點，像距為$\overline{AM'}$

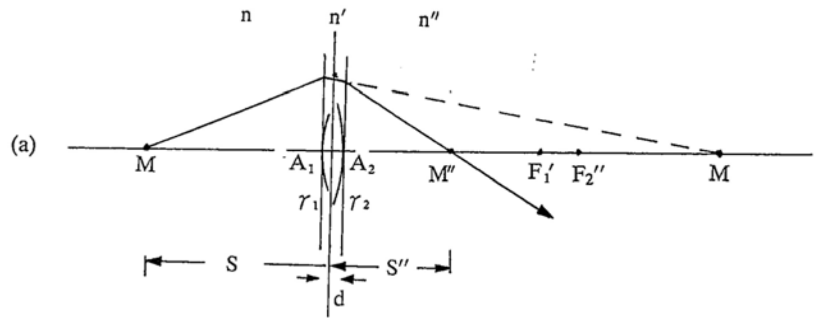


薄透鏡的成像公式

- 雖然薄透鏡的厚度忽略不計，但基本上它仍是由兩個單一球面，中間夾著透明材料所組成，所以這樣的系統成像就等於是做了兩次的單一球面成像
- 物對於第一球面的像，就相當於是第二球面的物，而物對第一球面成像的像距長度就等於對第二球面成像的物距長度
- 經過第二次球面的再次成像，就完成了薄透鏡的成像過程

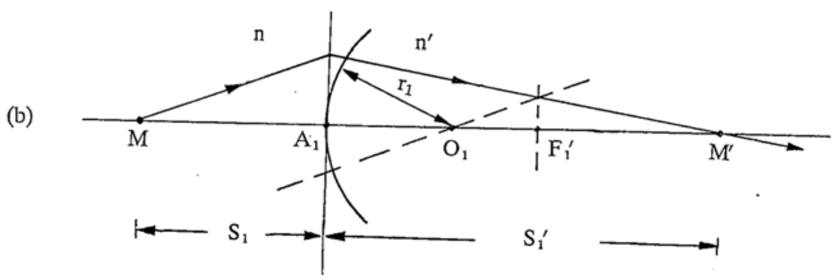
薄透鏡的成像公式

- M為物點位置，欲求經由薄透鏡成像的像點M”的位置



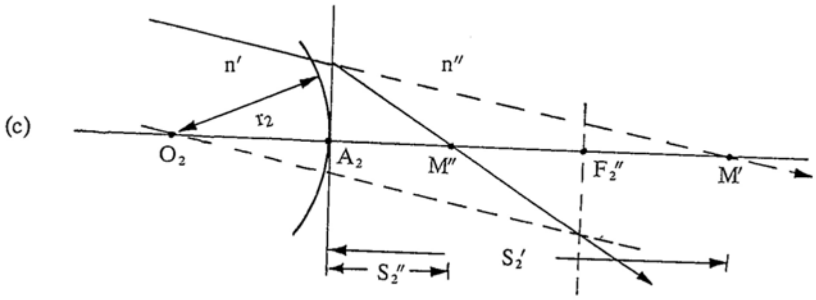
薄透鏡的成像公式

- M與M’是相對於第一球面的一對共軛點
- 物距為S_1，像距是S_1’



薄透鏡的成像公式

- M’與M”是相對於第二球面的一對共軛點
- 物距為S_2，像距是S_2’



薄透鏡的成像公式

- 上述各量之間的關係要滿足下面的式子：

$$\frac{n}{S_1}+\frac{n'}{S_1'}=\frac{n'-n}{r_1},\qquad \frac{n'}{S_2'}+\frac{n''}{S_2''}=\frac{n''-n'}{r_2}$$

- 因薄透鏡的厚度可忽略不計，所以： $S_1'=-S_2'$
- 由圖(c)可看出，M’位於第二球面的右側，所以上式中S_2’的符號要帶負值，將兩式相加可得：

$$\frac{n}{S_1}+\frac{n''}{S_2''}=\frac{n'-n}{r_1}+\frac{n''-n'}{r_2}$$

- 其中S_1、S_2”相當於是對薄透鏡系統成像的物距和像距

薄透鏡的成像公式

- 重新分別用S、S”表示之，可得到薄透鏡成像的通式：

$$\frac{n}{S}+\frac{n''}{S''}=\frac{n'-n}{r_1}+\frac{n''-n'}{r_2}$$

- 由上式，我們可對薄透鏡的特性做進一步的討論
- 假設物點在無限遠處(S= ∞)，則像點必在第二焦點上(S”=f’)，故：

$$\frac{n''}{f''}=\frac{n'-n}{r_1}+\frac{n''-n'}{r_2}$$

- 假設物點在第一焦點上(S=f)，則成像將在無窮遠處(S”=∞)，故：

$$\frac{n}{f}=\frac{n'-n}{r_1}+\frac{n''-n'}{r_2}$$

薄透鏡的成像公式

- 比較上述兩式，可知薄透鏡的兩焦距長比值為：

$$\frac{f}{f''}=\frac{n}{n''}$$

- 薄透鏡的折光本領就定義為上述兩式等號右邊的式子：

$$P=\frac{n'-n}{r_1}+\frac{n''-n'}{r_2}=P_1+P_2$$

- 其中P1和P2分別為第一球面和第二球面的折光本領
- 因此，薄透鏡的折光本領正好是組成此薄透鏡的兩單一球面的折光本領之和
- 若P為正值，表示此薄透鏡是一個會聚系統，薄透鏡的兩焦距長也是正值
- 若P為負值，則表示薄透鏡距有發散光束的能力，兩焦距長皆為負值

薄透鏡的成像公式

- 假設薄透鏡是放置在均勻的介質環境中(n=n”)，則我們可將上面的式子簡化為：

$$\frac{n}{S}+\frac{n}{S''}=(n'-n)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{n}{f}=\frac{n}{f''}$$

- 又假設所在的介質是空氣，可將n=1代入，可得：

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S''}=(n'-n)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}=\frac{1}{f''}$$

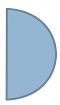
- 造鏡者公式(lens maker’s formula)

範例1

- 一平凸薄透鏡放置在空氣中，焦距是+10 cm，由折射率n = 1.52的材料製作而成，試問此平凸薄透鏡的曲率半徑為何？

因為放置空氣中，n = n” = 1，且f = f” = 10 cm。

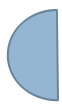
(a)假設平凸薄透鏡的平面在第一面，即其形狀為



則$r_1=\infty$ ，利用造鏡者公式可得：

$$(1.52-1)(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_2})=\frac{1}{10}, r_2=-5.2\,cm$$

(b)假設平凸薄透鏡的平面在第二面，即其形狀為



則$r_2=\infty$ ，利用造鏡者公式可得：

$$(1.52-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\infty})=\frac{1}{10}, r_1=5.2\,cm$$

範例2

- 在空氣中，一焦距為+20 cm的薄透鏡前40 cm處，放置一物體，問通過此薄透鏡的像成於何處？

利用薄透鏡的成像公式 $$\frac{n}{S}+\frac{n}{S''}=\frac{n}{f}=\frac{n}{f''}$$

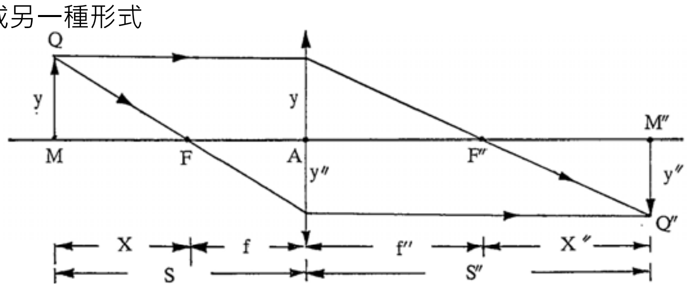
因為 n = n" = 1，f = f" = 20 cm

所以

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{S''}=\frac{1}{20} \Rightarrow S''=40cm$$

薄透鏡成像的高斯式

- 在造鏡者公式中，物距、像距等量的度量都是從中心點A點算起，我們稱為薄透鏡成像的高斯式(Gaussian form)，因此我們可將成像公式寫成另一種形式



- 我們以第一焦平面和第二焦平面為基準來計算透鏡的物距和像距，分別用X和X"表示，由圖中的三角形相似可得邊長成比例為：

$$\frac{-y''}{y}=\frac{X''}{f''}=\frac{f}{X}$$

薄透鏡成像的高斯式

- 因此，我們可以得到薄透鏡成像的牛頓式(Newtonian form)：

$$X \cdot X'' = f \cdot f''$$

範例3

- 一個薄透鏡置於空氣中，焦距為+60 mm，假設物體放置於第一焦點右方40 mm處，試問像成於何處？

(a)若以牛頓式處理此問題，則X=-40 mm，f=f"=60 mm

而 XX"=ff"，X"=-90 mm

故可知像成於第二焦點左邊90 mm處，即透鏡前30 mm處

(b)若以高斯式處理這個問題，則物距為+20 mm，故

1/20+1/S"=1/60，S"=-30 mm

結果與(a)相同

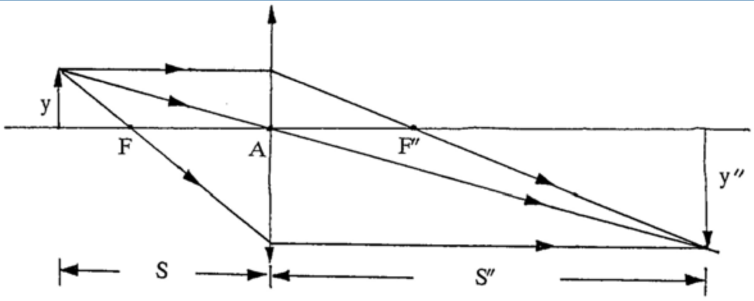
橫向放大率

- 對於薄透鏡的橫向放大率，我們可以直接從薄透鏡成像的牛頓式得到：

$$m=\frac{y''}{y}=-\frac{s''-f''}{f''}=-\frac{f}{s-f}$$

- 但是對於n=n'的系統而言，我們可以用更簡單的公式來計算橫向放大率的值

橫向放大率



- 當n=n'時，過中心點的光線不會產生偏折的情形，所以利用邊長成比例的關係可知：

$$m=\frac{y''}{y}=-\frac{s''}{s}$$

橫向放大率

- 在範例2中，物與像形成一對共軛面，它們的橫向放大關係是：

$$m=-\frac{40}{40}=-1$$

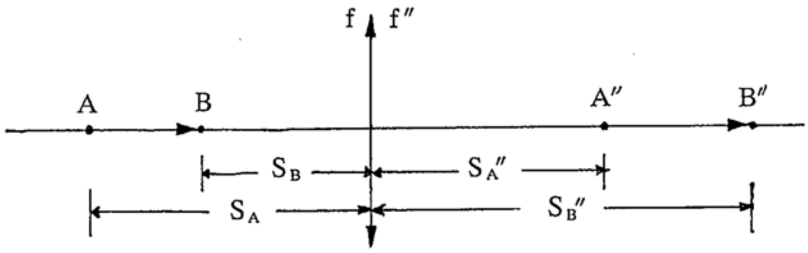
- 這表示得到的像是一個倒立實像(m<0)，且其大小和實物的大小相同(|m|=1)
- 在範例3中的一對共軛面，它們的橫向放大關係為：

$$m=-\frac{s''}{s}=-\frac{-30}{20}=1.5$$

- 這表示所得的像是一個正立的虛像(m>0)，而像高是物高的1.5倍(m=1.5)
- 由m值的正負，我們可以判斷出成像的正立或倒立

縱向放大率

- 沿著光軸方向上，像長和物長之比值稱為縱向放大率，用m_L表示



- 物$\overline{AB}$沿著光軸放置，若物點A的共軛點為像點A"，物點B的共軛點為像B"，則$\overline{AB}$所成的像即為$\overline{A''B''}$，m_L的定義為像長與物長的比值為：

$$m_L=\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}$$

縱向放大率

- 我們可以求出物距、像距與橫向放大率間的關係為：

$$s = f - \frac{f}{m}, s'' = f'' - mf''$$

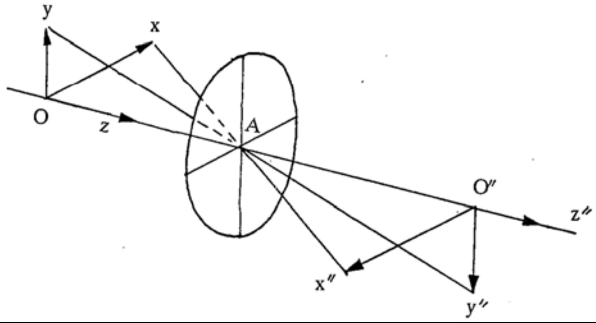
- 因此，若物點A的橫向放大率為m_A，B點的橫向放大率為m_B，則：

$$m_L = \frac{s''_B - s''_A}{s_B - s_A} = \frac{(f'' - m_B f'') - (f'' - m_A f'')}{(f - \frac{f}{m_B}) - (f - \frac{f}{m_A})} = -\frac{f''}{f} m_A m_B$$

- 上式為縱向放大率的通式
- 假如是在f=f"的系統中，縱向放大率就可以直接寫成物點A與物點B橫向放大率乘積的負值
- 若m_L計算結果是一個正值，表示物與像的方向是相反的
- 若m_L為負值，則表示物與像的方向相同，如上頁的圖

成像性質

- 物體在薄透鏡成像時，若物是沿著光軸放置，所形成的像亦在光軸上，如上頁圖
- 如果是垂直於光軸的物面，其共軛面也必垂直光軸，物像的方位關係，用下圖說明
- 在圖中，各方向的放大率皆為負值
- 如果物的位置改變，成像的方向就有可能會改變



成像性質

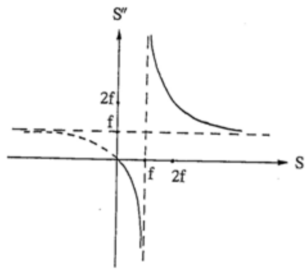
- 針對n=n"的系統，歸納出實物點(s>0)對會聚透鏡與發散透鏡的成像性質

會聚透鏡			
物的位置	像的位置	放大率	像的性質
$s = \infty$	$s'' = \|f''\|$	0	
$2f < s < \infty$	$\|f''\| < s'' < \|2f''\|$	$-1 < m < 0$	倒立縮小實像
$s = 2f$	$s'' = \|2f''\|$	$m = -1$	大小相同的倒立實像
$f < s < 2f$	$\|2f''\| < s'' < \infty$	$m < -1$	倒立放大實像
$s = f$	$s'' = \infty$	$m = \infty$	
$0 < s < f$	$\|s''\| > s$	$m > 1$	正立放大虛像

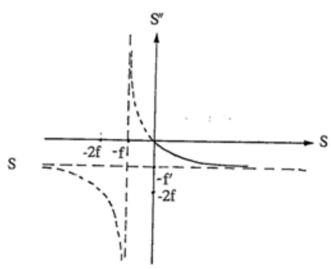
發散透鏡			
物的位置	像的位置	放大率	像的性質
$0 < s < \infty$	$\|s''\| < \|f''\|$	$0 < m < 1$	正立縮小虛像

成像性質

- 若考慮虛物點(s<0)的成像位置，可以得到下圖的結果
- 圖中橫座標為物距，縱座標是像距，虛線部分是虛物成像的位置曲線
- 虛物對於會聚透鏡所成的像是一個正立縮小的實像
- 虛物對於發散透鏡所成的像，則會隨物距位置之不同而有差異
  - 若虛物位於中心點和第一焦點間，得到的是正立放大的實像
  - 若虛物在第一焦點的右邊，所成之像將為倒立的虛像



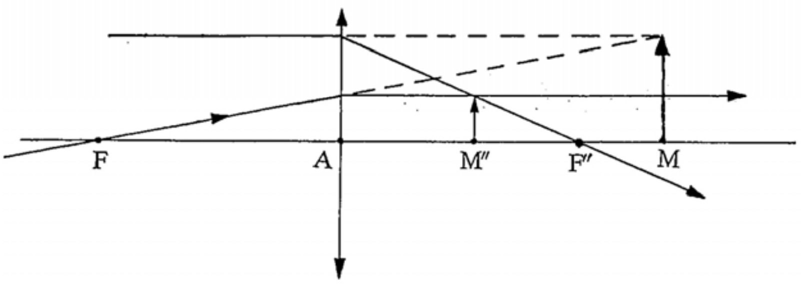
(a) 會聚透鏡



(b) 發散透鏡

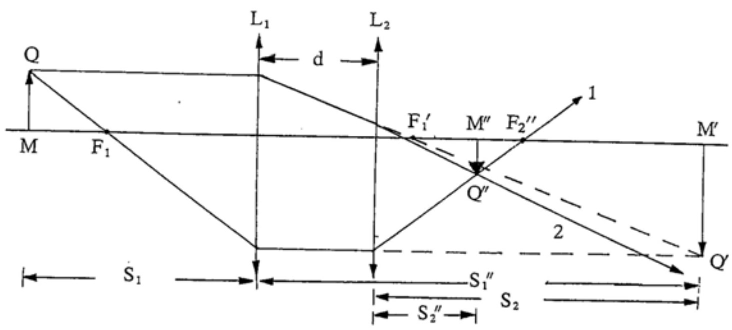
成像性質

- 上面我們雖然討論了虛物的成像性質，但一個系統若沒有實物是不可能會有虛物的，也就是說虛物的產生一定是由此薄透鏡前面的光學元件所造成之實像的結果
- 虛物M是前面某個光學元件的實像，M再對薄透鏡成像為一個縮小正立的實像M"



薄透鏡組合系統

- 對一個以上的薄透鏡所組成的薄透鏡系統成像，我們處理的方式是先對第一個薄透鏡成像，把所成的像當做是後面一個薄透鏡的物，然後再做一次成像，這個像又可在看成是下一個薄透鏡的物，依此類推，直到對系統的最後一個薄透鏡成像為止，最後所成的像就是物對整個薄透鏡組合系統所成的像
- 以做圖法來求一個物體對兩個薄透鏡組合系統成像的結果，如下圖



薄透鏡組合系統

- 物點發出的光線1通過F_1，經透鏡1折射成平行於光軸的方向射出，此光線對透鏡2來說，是平行入射光線，故會折往F_2"
- 第2條光線選擇由物點發出平行於光軸的光線進入透鏡1，經透鏡1後往F1'點的方向偏折，此光線遇到透鏡2後再產生折射，出射光和光線1交於Q"點，利用斜線作圖法求，$\overline{M''Q''}$即為$\overline{MQ}$經系統所成的像
- $\overline{M'Q'}$與$\overline{MQ}$是對透鏡1的一對共軛線，$\overline{M'Q'}$與$\overline{M''Q''}$則是對透鏡2的一對共軛線
- 假設兩透鏡放在均勻的介質環境中，則：

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1''}=\frac{1}{f_1},\ \frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2''}=\frac{1}{f_2}$$

- 其中s_2=-(s_1"-d)
  - s_1、s_1"、f_1分別為透鏡1的物距、像距與焦距
  - s_2、s_2"、f_2分別為透鏡2的物距、像距與焦距
  - d為兩透鏡間的距離

薄透鏡組合系統

- 由光路圖可看出，除了s_2以外，其餘量皆為正值
- 假設m_1為QM與Q'M'間的橫向放大率，m_2為Q'M'與Q"M"間的橫向放大率，則QM與Q"M"間的橫向放大率m可寫成：

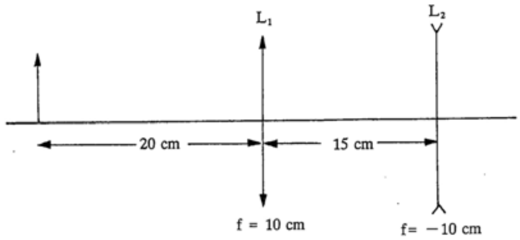
$$m=m_1\cdot m_2$$

- 由橫向放大率公式，上式可寫成：

$$m=(-\frac{s_1''}{s_1})(-\frac{s_2''}{s_2})$$

範例4

- 兩焦距長均為10 cm的凸透鏡與凹透鏡放在空氣中，兩透鏡相距15 cm，在凸透鏡前20 cm處，放置一物體，物高2 cm，試求像的位置、大小和性質



先求物對第1個透鏡所成的像

s_1=20 cm, f_1=10 cm, 1/20+1/s_1”=1/10, s_1”=20 cm

且m_1=-s_1”/s_1=-20/20=-1

所成的像在第一透鏡右邊20 cm處，是一個大小相同倒立的實像，以此實像當成第二透鏡之物，再對第2透鏡成像，則：

範例4

s2=-(20-15)=-5, f2=-10 cm, 1/-5+1/s2”=-1/10, s2”=10 cm

且m2=-s2”/s2=-10/-5=2

因此，整個系統的放大率為：

m=m_1m_2=-2

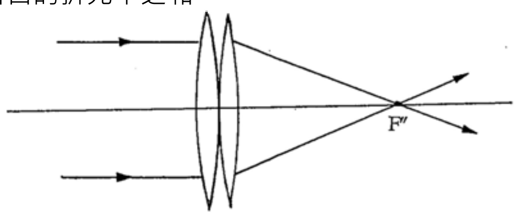
可得像高：

y’=yxm=2x(-2)=-4 cm

故成像在第二透鏡右邊10 cm處，像高4 cm，是一個倒立放大的實像

範例5

- 若將焦距是f_1和f_2的兩薄透鏡膠合在一起，試證明膠合系統的折光率是兩薄透鏡各自的折光率之和



假設系統放置於某n介質環境中，且對一無限遠的物點成像，由焦點的定義知像距即為此膠合透鏡的焦距長，即：s''=f

對第一透鏡而言，無限遠的物所成像在F_1''上，故對第二透鏡而言：

$s_2=-f_1$，且$s_2''=f$，滿足$1/-f_1+1/f=1/f_2$

即： $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$ 　故可知： $P=P_1+P_2$