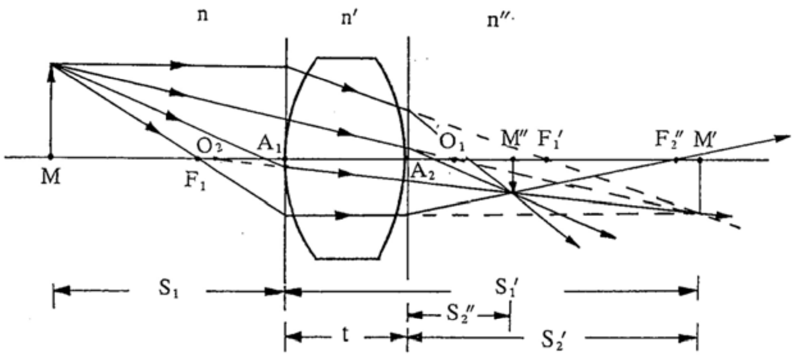
工程光學-厚透鏡系統

劉承揚

厚透鏡 (Thick lens)

- 在這章中，討論在高斯光學的條件下，一個物體對真實透鏡的成像性質
- 真實透鏡指的是將透鏡的厚度也考慮進去的透鏡，也就是厚透鏡
- 厚透鏡可視為是兩球面的組合，所以利用單一球面成像的圖解法和公式，便可以求得厚透鏡的成像結果

厚透鏡的平行線法



- O_1和O_2分別為兩球面的曲率中心
- f_1, f_1'和f_2', f_2"分別是兩球面的第一焦距長和第二焦距長
- M是物的位置，M'是物對第一球面的成像位置，而M"則是M'對第二球面所成的像
- 透鏡的厚度為t

厚透鏡的成像

- 厚透鏡的共軛位置間的關係為：

$$\frac{n}{s_1}+\frac{n'}{s_1'}=\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1''}=\frac{n'-n}{r_1},\qquad \frac{n'}{-s_2'}+\frac{n''}{s_2''}=\frac{n'}{f_2'}=\frac{n''}{f_2'}=\frac{n''-n'}{r_2}$$

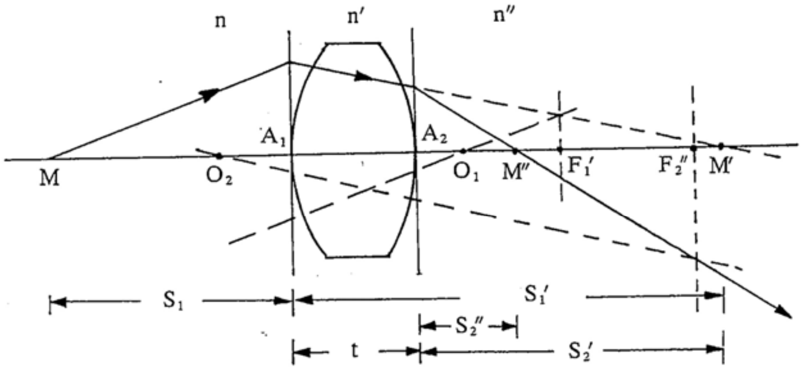
$$s_2'=s_1'-t$$

- 式中的正負符號依圖中所畫出的物像位置而定
- 整個厚透鏡的放大率m(M"對M)等於第一介面的放大率(M'對M)乘上第二介面的放大率(M"對M')，可寫成：

$$m=m_1m_2=\left(-\frac{s_1'-r_1}{s_1+r_1}\right)\left(-\frac{s_2''-r_2}{s_2'+r_2}\right)$$

厚透鏡的斜線法

- 在光軸上的物



範例1

- 設厚透鏡的曲率半徑分別為r_1=1.5 cm，r_2=-1.5 cm，厚度為2 cm，折射率為1.6，並將此透鏡放置在n=1.0，n"=1.3的環境中，試求一個無限遠處的物點，經過厚透鏡後的成像位置

對第一球面而言：

$$P_1=\frac{n'-n}{r_1}=\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1'}=\frac{1.6-1}{1.5}=\frac{1}{f_1}=\frac{1.6}{f_1'}=0.4\,cm^{-1}$$

$$f_1=2.5\,cm,\ f_1'=4\,cm$$

而$s_1=\infty$，所以：

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1.6}{s_1'}=0.4,\ s_1'=4\,cm$$

物經第一球面後成像於球面右邊4 cm處

範例1

對第二球面而言：

$$P_2 = \frac{n'' - n'}{r_2} = \frac{n'}{f_2'} = \frac{n''}{f_2''} = \frac{1.3 - 1.6}{-1.5} = \frac{1.6}{f_2'} = \frac{1.3}{f_2''} = +0.2\,cm^{-1}$$

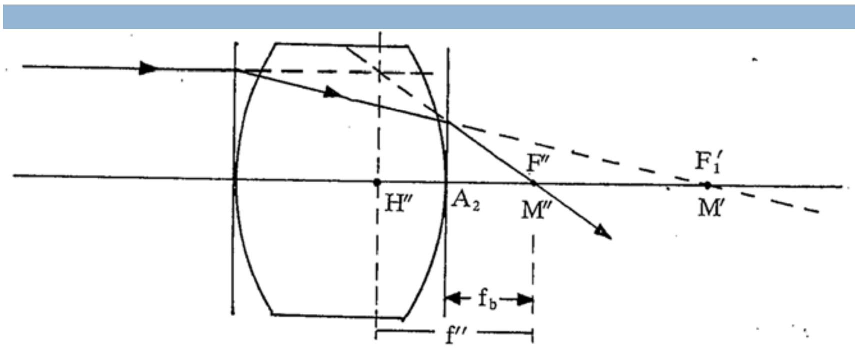
$$f_2' = +8\,cm,\ f_2'' = +6.5\,cm$$

而s'_2=-(4-2)=-2 cm，所以：

$$\frac{1.6}{-2} + \frac{1.3}{s_2''} = +0.2,\ s_2'' = 1.4\,cm$$

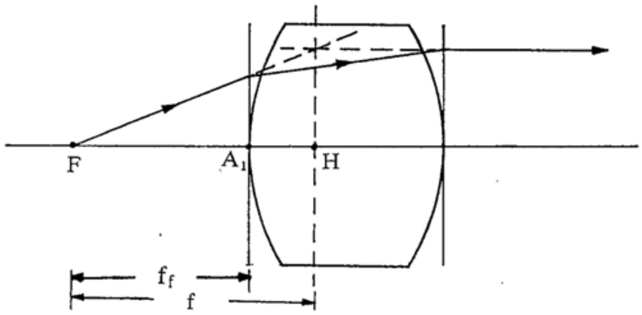
由上面計算可知，無限遠的物點，經厚透鏡後，成像位置在第二球面的右邊1.3 cm處

範例1



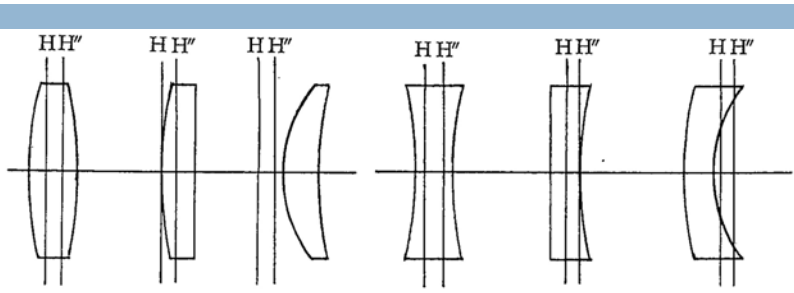
- 無限遠的物點所發出的光線到達厚透鏡時，已經可以視為是平行於光軸的平行光線，所以最後成像的像點位置，實際上就是此厚透鏡的第二焦點位置
- 平行於光軸射至厚透鏡的平行光線最後和光軸的會聚點，為此系統的第二焦點，故像點即為第二焦點，用符號F”表示
- 從系統射出的光線之延伸線，會和原本平行光軸的入射光線有一交點，過此交點對光軸作垂線，與光軸交於H”點，這一點稱為第二主光點
- A_2到F”的距離長，稱為後焦距長，用符號f_b表示

範例1



- 說明第一焦點和第一主光點
- 通過第一焦點F的入射光線，由系統射出時必平行於光軸，這條光線的延伸線會和原先過焦點的入射光線相交，過此交點對光軸作垂線，交光軸為H點，此點稱為第一主光點
- H到F的距離長為此系統的第一焦距長f，而頂點A_1到F的距離長稱為前焦距長，用符號f_f表示
- F與f”之間的關係為 n/f=n”/f”

主光點

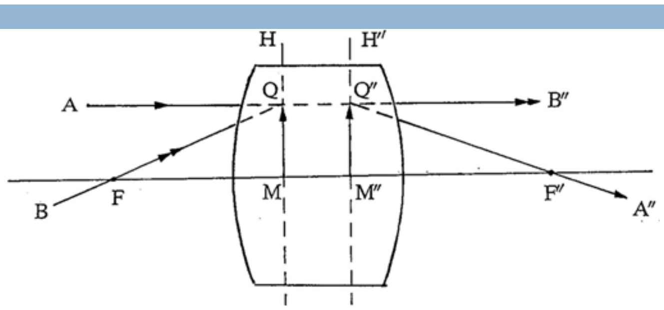


- 在厚透鏡中，定義了兩個主光點的位置，用符號H和H”表示
- 通過主光點和光軸垂直的面稱為主平面
- 根據主光點的定義，平行於光軸的光線射至厚透鏡，遇到第二主平面時，會以折向第二焦點的方向前進，而經過第一焦點的入射光線在碰到第一主平面後，會以平行光軸的方向前進
- 主平面在系統中的位置會因透鏡的形狀、厚度、材料等不同而改變
- 上圖說明具有相同屈光率，但形狀不同的會聚透鏡和發散透鏡的主平面分佈

主光點

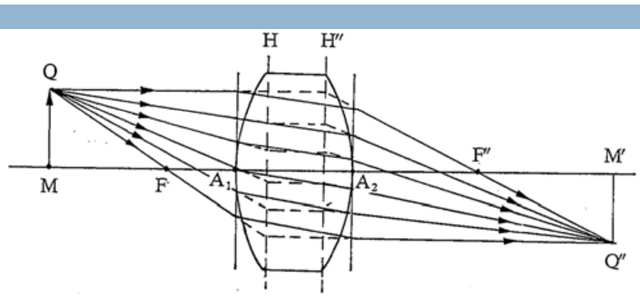
- 由上圖可看出，主平面的位置並不限於系統的內部，有時也可能位於系統的外面，而且有些透鏡的第一主平面的位置也並非一定在第二主平面的左邊
- 主平面在透鏡系統中佔有非常重要的地位，原因是由於兩個主平面恰巧是一對具有物像關係的共軛面

主平面的共軛關係



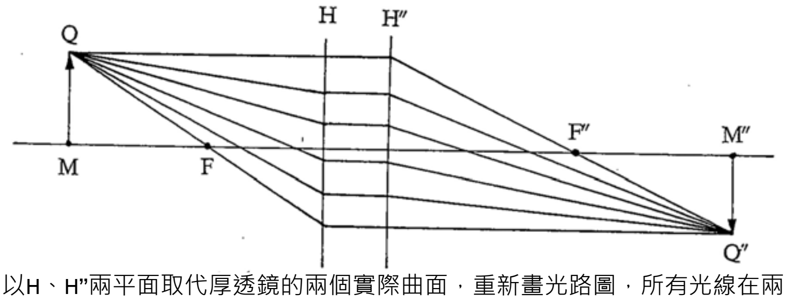
- 假設在第一主平面上有一物$\overline{QM}$垂直光軸放置，可利用繪圖法來求出光線經過透鏡後的成像位置
- 首先選取一條由M點發出的平行光線A，這條光線在碰到第二主平面時，將折往F"點的方向，令射出的光線為A"
- 另取一條由物點M射出但經過第一焦點F的光線B，此光線在碰到第一主平面處，會平行於光軸射出為B"
- A"與B"兩光線的交點M"即為M的像點，在作圖時可以發現M"的位置，正好在第二主平面上，故$\overline{Q"M"}$為$\overline{QM}$的像，且所成的像和物一樣高，則放大率為+1

主平面取代厚透鏡的真實面



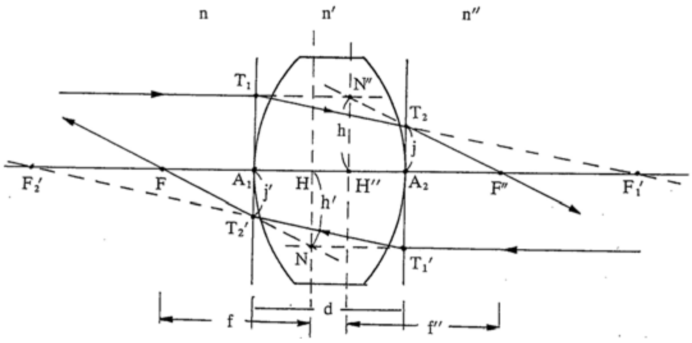
- 物$\overline{QM}$成像在$\overline{Q''M''}$處，這表示所有從物點M發出的光線都會經過像點M”，圖中每一條光線在透鏡的兩個面上會以遵守Snell定律的方式產生偏折，以實線畫出光線的實際路徑
- 若以兩主平面來代替厚透鏡的兩個面，那麼平行於光軸的光線遇到第二主平面後折往F”點，會聚在M”上
- 經過第一焦點的光線遇第一主平面後即平行射出，通過M”點，有如圖中的虛線路徑

主平面取代厚透鏡的真實面



- 以H、H”兩平面取代厚透鏡的兩個實際曲面，重新畫光路圖，所有光線在兩主平面間都是平行於光軸的
- 若將兩主平面間的距離忽略不考慮，就相當於是一個薄透鏡的平行光線圖解法，因此利用兩個主平面代替一個厚透鏡系統，就相當於在處理一個簡單的薄透鏡系統
- 此系統所有的物理量都將從主平面算起，例如：
  - 物距是物到第一主平面之間的距離
  - 像距是第二主平面到像之間的距離
  - 焦點到主平面間的距離為系統的焦距長

厚透鏡公式



- 利用一平行射入厚透鏡的光線軌跡，來求出一些相關物理量之間的關係
- 三角形$\Delta T_1A_1F_1$'和$\Delta T_2A_2F_1$'三角形是兩個相似三角形，利用邊長成正比的關係，可以寫出下面的關係式：

$$\frac{\overline{T_1A_1}}{\overline{A_1F_1'}}=\frac{\overline{T_2A_2}}{\overline{A_2F_1'}}$$

厚透鏡公式

- 令$\overline{T_1A_1}$=h，$\overline{T_2A_2}$=j，而A_1F_1'是第一個面的第二焦距長f_1'，代入上式可得：

$$\frac{h}{f_1'}=\frac{j}{f_1'-d}$$

其中d為透鏡的厚度

- 在ΔN"H"F"與Δ T_2A_2F"相似的條件下：

$$\frac{\overline{N''H''}}{\overline{H''F''}}=\frac{\overline{T_2A}}{\overline{A_2F''}}$$

- 式中，$\overline{N''H''}$=h，$\overline{H''F''}$為厚透鏡系統的第二焦距長f"，所以：

$$\frac{h}{f''}=\frac{j}{f''-\overline{H''A_2}}$$

厚透鏡公式

- 比較兩式可得： $\dfrac{f_1'}{f_1'-d}=\dfrac{f''}{f''-\overline{H''A_2}}$
- 重新整理後得到： $\overline{H''A_2}=f''\dfrac{d}{f_1'}$ 可寫為： $\overline{A_2H''}=-f''\dfrac{d}{f_1'}$
- 因為 $\overline{A_2F''}=f''-\overline{H''A_2}$ 所以 $\overline{A_2F''}=f''\left(1-\dfrac{d}{f_1'}\right)$
- 再利用一條過焦點F的光線軌跡，可求出其他相關物理量之間的關係
- 因為Δ T_1'$A_2$$F_2$'~ Δ T_2'$A_1$$F_2$'和Δ NHF~ Δ T_2'A_1F，所以：

$$\frac{h'}{f_2'}=\frac{j'}{f_2'-d} \qquad \frac{h'}{f}=\frac{j'}{f-\overline{A_1H}}$$

- 比較兩式可得：

$$\frac{f_2'}{f_2'-d}=\frac{f}{f-\overline{A_1H}}$$

厚透鏡公式

- 故： $\overline{A_1H}=f\dfrac{d}{f_2'}$
- 因為 $\overline{FA_1}=f-\overline{A_1H}$ 所以 $\overline{A_1F}=-f\left(1-\dfrac{d}{f_2'}\right)$
- 上式分別以A1、A2為參考點，用來計算頂點到主光點或焦點的距離
- 若公式計算的結果為正值，這表示主光點或焦點的位置在參考點的右邊。若計算結果為負值，則主光點和焦點的位置就位於參考點的左邊
- 厚透鏡的屈光率，可利用對第二個面的成像關係式求得
- 對上圖中的平行光線來說，經第一個面後，使無限遠處的物點成像在第一個面的第二焦點上(F'_1)，但對第二個面來說，F'_1相當是一個虛物點，成像在F"位置上，所以：

物距： $-\left(f_1'-d\right)$ 像距： $f''-\overline{H''A_2}=f''-f''\dfrac{d}{f_1'}$

厚透鏡公式

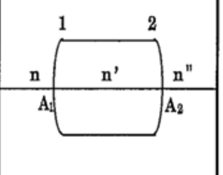
- 將上兩式代入成像公式： $\dfrac{n'}{-(f_1'-d)}+\dfrac{n''}{f''-f''\dfrac{d}{f_1'}}=\dfrac{n''}{f_2''}=\dfrac{n'}{f_2'}$
- 上式可重新整理為： $\dfrac{n''}{f''}=\dfrac{n'}{f_1'}+\dfrac{n''}{f_2''}-\dfrac{n''d}{f_1'f_2''}$
- 可將焦距的倒數用屈光率來表示，因為：

$$P_1=\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1'}\qquad P_2=\frac{n'}{f_2'}=\frac{n''}{f_2''}\qquad P=\frac{n}{f}=\frac{n''}{f''}$$

- P1、P2、P分別表示第一個面，第二個面和厚透鏡的屈光率，故：

$$P=P_1+P_2-P_1P_2\frac{d}{n'}$$

厚透鏡公式

$P=P_1+P_2-P_1P_2\dfrac{d}{n'}$ 或 $\dfrac{n}{f}=\dfrac{n''}{f''}=\dfrac{n'}{f_1'}+\dfrac{n''}{f_2''}-\dfrac{n''d}{f_1'f_2''}$	
$A_1F=-f\,(1-\dfrac{d}{f_2'})=-\dfrac{n}{P}(1-\dfrac{d}{n'}P_2)$	
$A_2F''=f''\,(1-\dfrac{d}{f_1'})=\dfrac{n''}{P}(1-\dfrac{d}{n'}P_1)$	
$A_1H=f\,\dfrac{d}{f_2'}=\dfrac{n}{P}\dfrac{d}{n'}P_2$	
$A_2H''=-f''\,\dfrac{d}{f_1'}=-\dfrac{n''}{P}\dfrac{d}{n'}P_1$	

範例2

- 根據範例1中的厚透鏡，試求此透鏡的(a)屈光率、(b)焦距長、(c)焦點位置、(d)主光點位置。若一物放置在透鏡的第一頂點A1前3 cm處，(e)求其成像位置、(f)放大率和像的性質如何
- 先求厚透鏡兩個面的屈光率和焦距長：
- 第一個面：

$$P_1 = \frac{n'-n}{r_1} = \frac{1.6-1}{1.5} = 0.4cm^{-1} \qquad f_1 = \frac{n}{P_1} = 2.5cm \qquad f_1' = \frac{n'}{P_1} = 4cm$$

- 第二個面：

$$P_2 = \frac{n''-n'}{r_2} = \frac{1.3-1.6}{-1.5} = 0.2cm^{-1} \qquad f_2' = \frac{n'}{P_2} = 8cm \qquad f_2'' = \frac{n''}{P_2} = 6.5cm$$

- (a)

$$P = P_1 + P_2 - \frac{d}{n'}P_1P_2 = 0.4 + 0.2 - \frac{2}{1.6}(0.4)(0.2) = 0.5cm^{-1} = 50D$$

厚透鏡的屈光率為+50D，因此是一個會聚透鏡

範例2

- (b) $f = \frac{n}{P} = \frac{1}{0.5} = 2cm \qquad f'' = \frac{n''}{P} = \frac{1.3}{0.5} = 2.6cm$
- (c)

$$\overline{A_1F} = -\frac{n}{P}\left(1-\frac{d}{n'}P_2\right) = -\frac{1}{0.5}\left[1-\frac{2}{1.6}(0.2)\right] = -1.5cm$$

$$\overline{A_2F''} = -\frac{n''}{P}\left(1-\frac{d}{n'}P_1\right) = \frac{1.3}{0.5}\left[1-\frac{2}{1.6}(0.4)\right] = 1.3cm$$

第一焦點在第一頂點左邊1.5 cm處，第二焦點在第二頂點右邊1.3 cm處

- (d)

$$\overline{A_1H} = \frac{n}{P}\frac{d}{n'}P_2 = \left(\frac{1}{0.5}\right)\left(\frac{2}{1.6}\right)(0.2) = 0.5cm$$

$$\overline{A_2H''} = -\frac{n''}{P}\frac{d}{n'}P_1 = \left(\frac{1.3}{0.5}\right)\left(\frac{2}{1.6}\right)(0.4) = -1.3cm$$

第一主光點在第一頂點右邊0.5 cm處，第二主光點在第二頂點的左邊1.3cm處

範例2

- (e)物距為物到第一主光點間的距離，故： $s = 3 + 0.5 = 3.5cm$

  代入成像公式： $\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} = P$

  因此： $\frac{1}{3.5} + \frac{1.3}{s''} = 0.5 \qquad s'' = 6.07cm$

  成像在第二主光點右邊6.07 cm處，亦即在第二頂點A_2右方4.77 cm

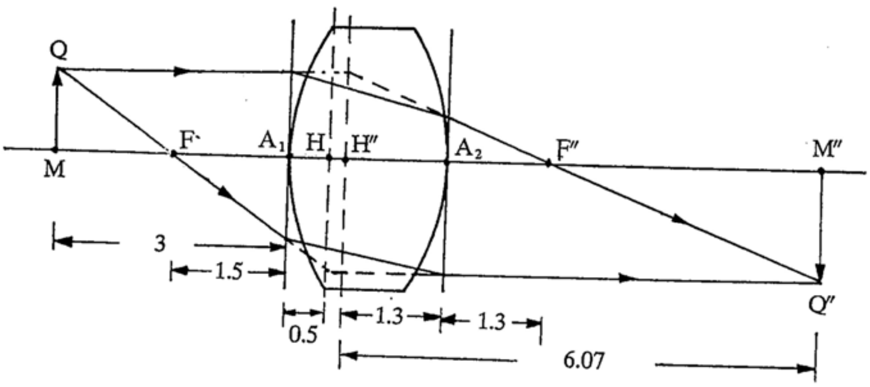
- (f)由於透鏡兩邊的折射率n≠n"，所以橫向放大率為：

$$m = -\frac{(s'' - f'')}{f''} = -\frac{(6.07 - 2.6)}{2.6} = -1.33$$

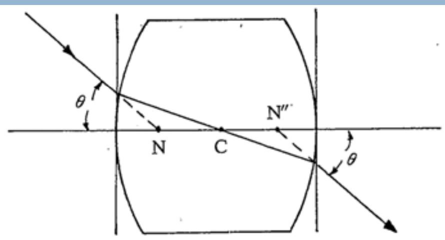
  所得到的像是一個放大1.33倍的倒立實像

範例2

- 將上述計算結果畫成圖

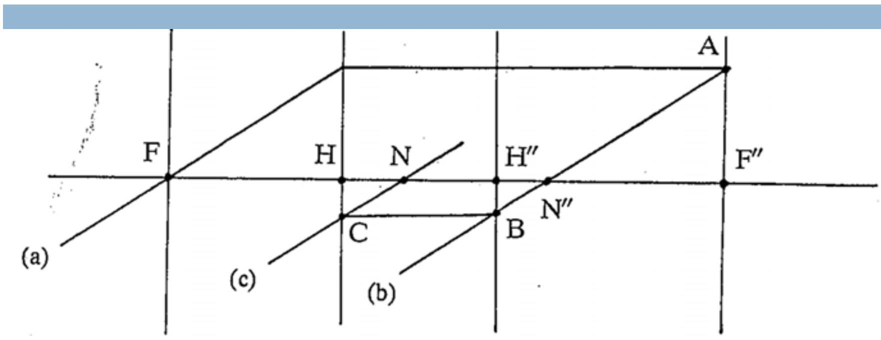


節點(Nodal points)



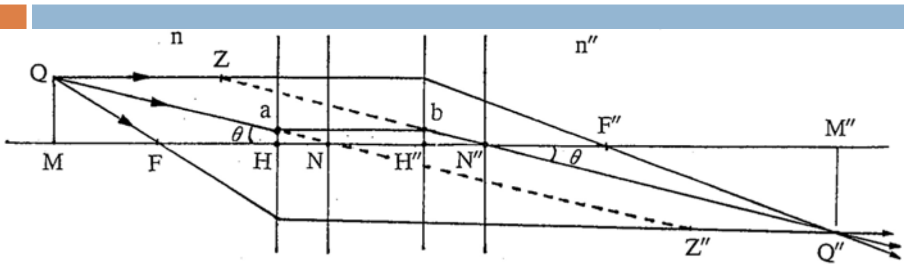
- 一光線以某個θ角入射至系統，若以相同角度從系統射出，入射和出射光線與光軸的交點，稱之為第一節點和第二節點，分別用N和N”表示
- 入射方向指向第一節點的斜線，會以相同角度從第二節點射出，相當於在前面章節中提到的不偏折光線，正因為過節點的光線不發生偏折，所以可稱節點是一對角放大率為+1的共軛點
- 雖然經過節點的光線不產生偏折，但會有相當程度的位移，其效果就如同經過一平行平板玻璃一樣
- 圖中實際的光線軌跡和光軸的交點C，稱為系統的光學中心
- 系統的光學中心C，是一個只與曲率半徑和透鏡厚度有關的點，也是唯一不會隨入射光波波長而改變位置的光點

節點的位置



- 使用作圖法求取節點位置
- 先作一經過第一焦點的斜線(a)，遇到第一主平面後平行於軸射出，交第二交平面於A點
- 再過A點作(a)光線的平行線(b)，(b)光線與光軸的交點就是第二節點N”的位置
- 過(b)光線與第二主平面的交點B，作光軸的平行線，交第一主平面於C點
- 再過C點作(a)和(b)光線的平行線(c)，此光線與光軸的交點就是第一節點N的位置

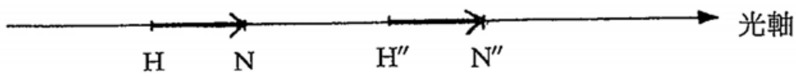
節點的位置



- 如何計算出節點位置
- $\overline{MQ}$對厚透鏡的成像圖，將通過透鏡後不會偏折的光線畫出，此光線就是通過節點的光線，這條光線在兩主平面間是平行於光軸的，由指向N點的方向入射，從N"點以相同角度射出
- 將此光線的延伸線以虛線畫出來，分別交平行於軸的光線於Z與Z"點
- 圖中的四邊形QZQ"Z"是一個平行四邊形，而$\overline{NN''}$與$\overline{ab}$皆平行於$\overline{QZ}$和$\overline{Q''Z''}$，它們的長度也都相等，$\overline{ab}$的長度就是$\overline{HH''}$的長，所以：

$$\overline{NN''} = \overline{HH''}$$

節點與焦點間的關係



- 由節點的定義，如果將一物點放置在第一節點上，則第二節點必是它的成像點，所以兩節點就是一對物像的共軛點，來計算這對共軛點的橫向放大率
- 將一物縱向放置在光軸上，物的左右兩端分別在第一主光點與第一節點上
- 由於共軛的關係，所以像的左右兩端分別會在第二主光點與第二節點上
- 此像的縱向放大率為-1，即：

$$m_L = -1 = \frac{\overline{H''N''}}{\overline{HN}} = -\frac{f''}{f} m_H m_N$$

- m_H、m_N分別為主光點與節點這兩對共軛點的橫向放大率，其中：

$$m_H = +1$$

- 所以：

$$m_N = \frac{f}{f''}$$

節點與焦點間的關係

- 當透鏡兩邊的環境折射率相等時(n=n")，兩焦距長將等長，即f=f"，節點的橫向放大率就與m_H相同，因此，當n=n"時，主光點與節點將重合為一
- 如果n ≠n"，則主光點與節點是各自分離
- 由節點的位置圖中，可對系統中任一對共軛點的橫向放大率做計算，ΔQMN與ΔQ"M"N"相似，利用邊長成正比的關係得到：

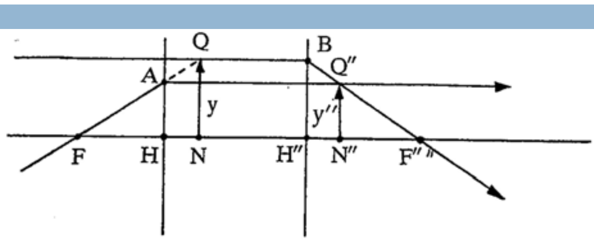
$$m = -\frac{\overline{N''M''}}{\overline{NM}}$$

- 當主光點與節點重合時，上式就修正為：

$$m = -\frac{\overline{H''M''}}{\overline{HM}}$$

- 也就是相當於薄透鏡系統中，橫向放大率為像距除以物距的負值
- 當n ≠n"時，可利用上式來計算橫向放大率，像距、物距都是從節點算起的

節點與焦點間的關係



- 將一物橫放在第一節點上，利用過焦點的兩條光線作出它的成像圖，像會在第二節點上
- 利用圖中ΔBH"F"與ΔQ"N"F"相似，可得節點的橫向放大率為：

$$m_N = \frac{\overline{N''F''}}{\overline{H''F''}}$$

- 或利用ΔQNF與ΔAHF相似，也可得到：

$$m_N = \frac{\overline{HF}}{\overline{NF}}$$

節點與焦點間的關係

- 比較上兩式，可得： $\overline{N''F''} = \overline{HF} = f$ $\overline{NF} = \overline{H''F''} = f''$
- 再利用上圖，更可進一步將節點確實的位置計算出來：

$$\overline{HN} = \overline{FN} - \overline{FH} = \overline{FN} - f = f'' - f$$

- $\overline{H''N''}$的長度亦為f”-f，也可寫成另一種形式：

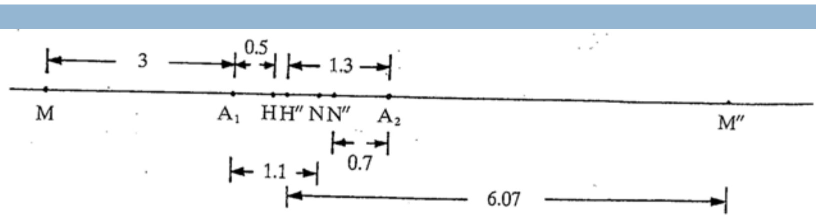
$$\overline{HN} = \overline{H''N''} = f\left(\frac{n''}{n} - 1\right) = f''\left(1 - \frac{n}{n''}\right)$$

- 上式是以主光點為參考點，由此可求出節點與主光點間相距的長度及相對位置
- 若計算值為正，表示由參考點向右量取，即N、N“分別在H、H”之右邊
- 若計算值為負，則由參考點向左量取
- 若取透鏡的頂點為參考點，可將計算式列於下：

$$\overline{A_1N} = \overline{A_1H} + \overline{HN} = f\left(\frac{d}{f_2'} + \frac{n'' - n}{n}\right)$$

$$\overline{A_2N''} = \overline{A_2H''} + \overline{H''N''} = -f''\left(\frac{d}{f_1'} - \frac{n'' - n}{n''}\right)$$

範例3



- 根據上述範例的厚透鏡系統，(a)求系統節點的位置，(b)一物置於第一頂點前3 cm處，求橫向放大率
- 在範例2中，已求得f=2 cm、f”=2.6 cm，f'_1=4 cm、f'_2=8 cm
- (a)

$$\overline{A_1N} = f\left(\frac{d}{f_2'} + \frac{n'' - n}{n}\right) = 1.1cm$$

$$\overline{A_2N''} = -f''\left(\frac{d}{f_1'} - \frac{n'' - n}{n''}\right) = -0.7cm$$

由計算可知第一節點在第一頂點右邊1.1 cm處，第二節點在第二頂點左邊0.7 cm處

範例3

- (b)在範例2中，已計算出頂點前3 cm處的物，其成像位置在第二主光點右邊6.07 cm
- 由圖知：

$$\overline{MN} = 3 + 1.1 = 4.1cm$$

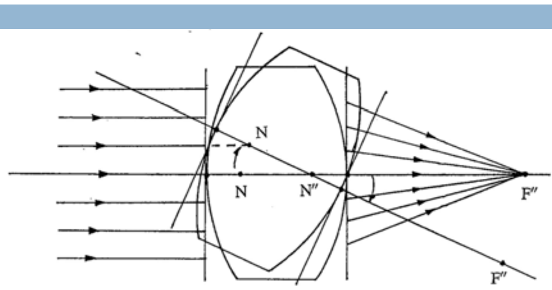
$$\overline{M''N''} = 6.07 - 1.3 + 0.7 = 5.47cm$$

- 故：

$$m = -\frac{\overline{M''N''}}{\overline{MN}} = -\frac{5.47}{4.1} = -1.334$$

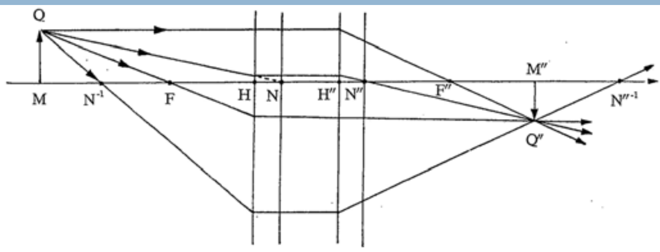
- 此處求得的橫向放大率與範例2的答案相符

測節器(Nodal slide)



- 一種測量節點的裝置，稱為測節器
- 在大多數的光學系統均滿足n=n"，節點的位置就是主光點的位置，所以有需要尋找節點位置
- 測節器的原理為，通過節點的光線經透鏡後行進方向不發生偏向的現象
- 如上圖，使一平行於光軸的平行光射入待測透鏡，此光束經系統後射出，會聚於第二焦點F"上
- 若保持入射光束方向不變，以光軸上的任一點當轉動軸，在旋轉透鏡時，可以發現平行光束的會聚點會上下移動
- 唯有當轉動軸是通過第二節點時，無論透鏡怎麼旋轉，光束仍會聚在F"點上，不會上下移動
- 若將透鏡反向，相同的方法可決定出第一節點的位置

基點(Cardinal points)



- 透鏡系統中三對重要的點：主光點、焦點和節點，統稱為基點
- 基點在系統中的位置會因曲率半徑、折射率和厚度之不同而改變，這六個點決定了透鏡系統成像的基本性質
- 負主光點：
  - 主光點是橫向放大率為+1的一對共軛點，所以定義橫向放大率為-1的一對共軛點為負主光點
  - 在n=n"的透鏡系統中，這一對共軛點恰在兩倍焦距的地方
- 負節點：
  - 定義角放大率為-1的共軛點為負節點，以對應於角放大率為+1的節點
  - 負節點的位置如上圖，用符號N^{-1}表示
  - 節點與負節點恰好對稱的分佈在焦點兩邊

厚透鏡組合

- 由厚透鏡系統的分析可知，厚透鏡的兩個面，是二個具有屈光率的元件，中間夾著折射率為n'的透明材料製成
- 也可以將相同的概念應用在兩個薄透鏡組合的系統中，兩薄透鏡相當於厚透鏡的兩個面，具有折光能力，中間夾著n'=1的介質，因此就可將兩薄透鏡組合視為厚透鏡來處理

範例4

- 焦距大小同為10 cm的凸薄透鏡與凹薄透鏡置於空氣中，凸透鏡在前凹透鏡在後，兩透鏡同軸，相距15 cm，凸透鏡前20 cm處，放置一物體，物高2 cm，試求(a)系統的屈光率及焦距長、(b)系統基點的位置、(c)像的位置及像的性質
- 先求薄透鏡的屈光率

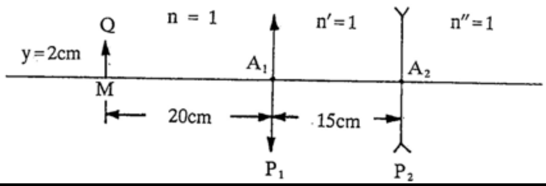
凸薄透鏡：

$$P_1 = \frac{1}{10} = 0.1cm^{-1}, \qquad f_1 = f_1' = 10cm$$

凹薄透鏡：

$$P_2 = -\frac{1}{10} = -0.1cm^{-1}, \qquad f_2' = f_2'' = -10cm$$

- 將已知條件畫出：



範例4

- (a)求系統的屈光率及焦距長

$$P = P_1 + P_2 - \frac{d}{n'}P_1P_2 = 0.15cm^{-1}, \qquad f = f'' = \frac{1}{P} = 6.667cm$$

- (b)各基點的位置為

$$A_1F = -\frac{n}{P}\left(1 - \frac{d}{n'}P_2\right) = -16.667cm \qquad A_2F'' = \frac{n''}{P}\left(1 - \frac{d}{n'}P_1\right) = -3.333cm$$

第一焦點在凸薄透鏡左邊16.667 cm處，第二焦點在凹透鏡左邊3.33 cm處

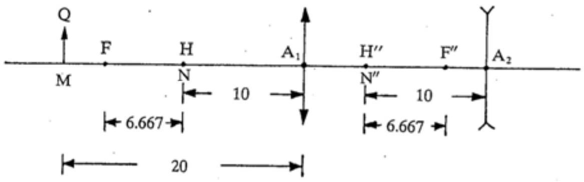
$$A_1H = \frac{n}{P}\frac{d}{n'}P_2 = -10cm \qquad A_2H'' = -\frac{n''}{P}\frac{d}{n'}P_1 = -10cm$$

第一主光點在凸薄透鏡左邊10 cm處，第二主光點在凹薄透鏡左邊10 cm處

$$A_1N = f\left(\frac{d}{f_2'} + \frac{n''-n}{n}\right) = -10cm \qquad A_2N'' = -f''\left(\frac{d}{f_1'} - \frac{n''-n}{n''}\right) = -10cm$$

由上面的計算可知，節點與主光點重合

範例4



- (c)物在凸薄透鏡前20 cm處，故：

$$s = \overline{MH} = 20 - 10 = 10cm \qquad \frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} = P \qquad s'' = 20cm$$

s”為H”到像點的距離，故成像在第二主光點右邊20 cm處，也就是在凹薄透鏡右邊10 cm處

- 因n=n”，所以：

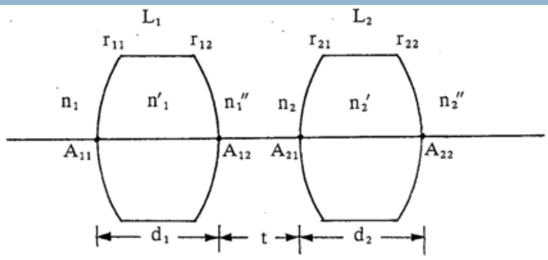
$$m = -\frac{s''}{s} = -\frac{20}{10} = -2 \qquad y' = y \times m = 2 \times -2 = -4cm$$

- 所成像為高4 cm的倒立放大實像

厚透鏡組合

- 在上面的範例中，證明二個薄透鏡系統可等效於一個厚透鏡系統
- 若有多個薄透鏡組成的系統，也可以簡化，等於一個厚透鏡系統
- 距離的計算都必須以主光點為參考點
- 如果透鏡系統由若干個厚透鏡組成，也可以將整個系統等效於一個厚透鏡系統

範例5



- 兩個相同的厚透鏡同軸放置於空氣中，曲率半徑為r1=5.2 cm、r2=-5.2 cm、n=1.68、厚度為3.5 cm，兩透鏡之間相距3 cm，試求系統的(a)屈光率和焦距、(b)基點位置

$$r_{11} = r_{21} = 5.2cm \quad r_{12} = r_{22} = -5.2cm \quad n_1' = n_2' = 1.68 \quad n_1 = n_1'' = n_2 = n_2'' = 1$$

$$d_1 = d_2 = 3.5cm \quad t = 3cm$$

- 先計算第一個厚透鏡的屈光率及基點位置

$$P_{11} = \frac{n_1' - n_1}{r_{11}} = 0.13cm^{-1} \quad P_{12} = \frac{n_1'' - n_1'}{r_{12}} = 0.13cm^{-1}$$

範例5

- 第一厚透鏡的屈光率為：

$$P_1 = P_{11} + P_{12} - \frac{d_1}{n_1'} P_{11} P_{12} = 0.225cm^{-1}$$

- 基點位置：

$$A_{11}H_1 = \frac{n_1}{P_1}\frac{d_1}{n_1'} P_{12} = 1.204cm \qquad A_{12}H_1'' = -\frac{n_1''}{P_1}\frac{d_1}{n_1'} P_{11} = -1.204cm$$

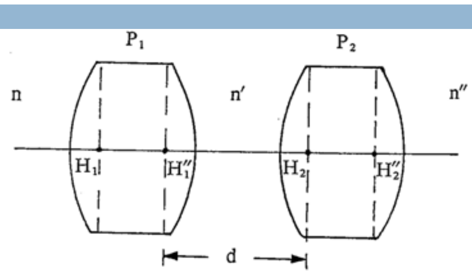
$$A_{11}F_1 = -\frac{n_1}{P_1}\left(1 - \frac{d_1}{n_1'} P_{12}\right) = -3.24cm \qquad A_{12}F_1'' = -\frac{n_1''}{P_1}\left(1 - \frac{d_1}{n_1'} P_{11}\right) = 3.24cm$$

- 因為第二透鏡是完全相同透鏡，所以：

$$P_2 = 0.225cm^{-1} \qquad A_{21}H_2 = 1.204cm \qquad A_{22}H_2'' = -1.204cm$$

$$A_{21}F_2 = -3.24cm \qquad A_{22}F_2'' = 3.24cm$$

範例5



- 求等效的厚透鏡系統時，可分別將第一、第二厚透鏡看成是二個具有P_1、P_2屈光率的元件，整個系統的頂點分別為H_1和H''_2，元件間的厚度為$\overline{H_1''H_2}$，其值如下：

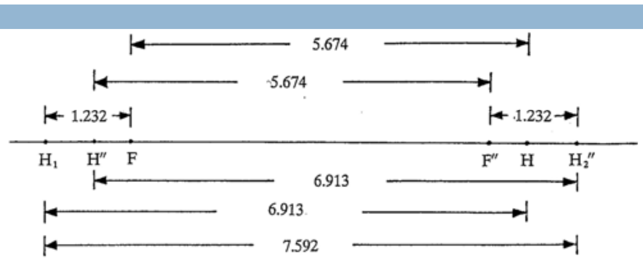
$$P_1 = P_2 = 0.225cm^{-1} \qquad d = 1.204 + 1.204 + 3 = 5.408cm$$

$$n = n' = n'' = 1$$

- 所以等效系統的屈光率和焦距為：

$$P = P_1 + P_2 - \frac{d}{n'}P_1P_2 = 0.176cm^{-1} \qquad f = f'' = \frac{1}{P} = 5.674cm$$

範例5



- 基點位置，因為n=n''=1，所以主光點與節點重合，位於：

$$A_1H = \frac{n}{P}\frac{d}{n'}P_2 = 6.913cm \qquad A_2H'' = -\frac{n''}{P}\frac{d}{n'}P_1 = -6.913cm$$

本例中的H_1、H_2''就相當於上面公式中的A_1、A_2，這表示整個系統的第一主光點(節點)在H_1點右邊6.913 cm處，第二主光點(節點)在H_2''左邊6.913 cm處

$$A_1F = -\frac{n}{P}\left(1 - \frac{d}{n'}P_2\right) = 1.232cm \qquad A_2F'' = \frac{n''}{P}\left(1 - \frac{d}{n'}P_1\right) = 1.232cm$$

第一焦點在H_1點右邊1.232 cm處，第二焦點在H_2''點左邊1.232 cm處